TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik
PROF. DR. M. WOLF
DR. M. PRÄHOFER

Mathematik für Physiker 2 (Analysis 1) MA9202

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9202_2019W
WS 2019/20
Blatt 9
(10.12.2019)

Zentralübung

Z9.1. Stetigkeit der Umkehrfunktion

Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle und $f : I \to J$ streng monoton wachsend und surjektiv. Dann sind f und die Umkehrfunktion $f^{-1} : J \to I$ stetig.

Z9.2. Stetigkeit und Grenzwerte der Umkehrfunktion

Seien $-\infty \leq \alpha < \beta \leq \infty$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$ und $f : (\alpha, \beta) \to (a, b)$ eine streng monoton wachsende surjektive Funktion. Zeigen Sie:

$$\lim_{y \to a} f^{-1}(y) = \alpha, \quad \lim_{y \to b} f^{-1}(y) = \beta, \quad \lim_{x \to \alpha} f(x) = a, \quad \lim_{x \to \beta} f(x) = b.$$

Z9.3. Ableitungen

Berechnen Sie jeweils die Ableitung der folgenden Funktionen ($\alpha \in \mathbb{R}$), wobei arcsin die Umkehrfunktion von $\sin\big|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ ist.

(a) sin, (b) arcsin, (c) $x \mapsto x^\alpha$, $x > 0$, (d) $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$, $|x|<1$.

Präsenzaufgaben

P9.1. Landau-Symbole

Begründen Sie:

(a) Existiert $\lim\limits_{x \to x_0} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \in (0, \infty)$, so gilt $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ und $g(x) = \mathcal{O}(f(x))$ für $x \to x_0$.

(b) $\sin(x) = \mathcal{O}(x)$ $(x \to 0)$, $\quad \sin(x) = \mathcal{O}(1)$ $(x \to \infty)$.

(c) $\sinh(x) = \mathcal{O}(x)$ $(x \to 0)$, $\quad \sinh(x) = \mathcal{O}(\mathrm{e}^x)$ $(x \to \infty)$.

P9.2. Zwischenwertsatz

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$. Zeige: Dann ist f surjektiv.

P9.3. Ableiten

(a) Berechnen Sie elementar die Ableitung von $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(b) Berechnen Sie die Ableitung des arccos (Umkehrfunktion von $\cos\big|_{[0,\pi]} : [0, \pi] \to [-1, 1]$).

(c) Berechnen Sie die Ableitungen des Tangens und Arcustangens.

(d) $f : [-1, \infty) \to [-\frac{1}{\mathrm{e}}, \infty)$, $f(x) = x\mathrm{e}^x$, ist bijektiv. Die zugehörige Umkehrfunktion $W : [-\frac{1}{\mathrm{e}}, \infty) \to [-1, \infty)$ wird als Lambertsche W-Funktion bezeichnet. Berechnen Sie die Ableitung von W an den Punkten 0 und e.

Hausaufgaben

H9.1. Satz vom Maximum

Sei $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ stetig mit $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$. Zeige: f nimmt sein Maximum an.

H9.2. Ableiten

Berechnen Sie jeweils auf dem maximalen Definitionsbereich die Ableitungen von

(a) $x \mapsto x \ln x$, (b) $x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1}$, (c) $x \mapsto \ln(\ln(\ln x))$, (d) $x \mapsto x^{x^x}$.

H9.3. Ableitungensregeln

Berechnen Sie jeweils die Ableitung der folgenden Funktionen:

(a) sinh, cosh, tanh. Hinweis: $\tanh : \mathbb{R} \to (-1, 1)$, $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$ ist streng monoton wachsend.

(b) $\operatorname{arsinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\operatorname{arcosh}:[1, \infty) \to \mathbb{R}_0^+$, $\operatorname{artanh}:(-1, 1) \to \mathbb{R}$, die zugehörigen Umkehrfunktionen.

(c) $x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, $(1, \infty) \ni x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$, $(-1, 1) \ni x \mapsto \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$,

Skizzieren Sie die Funktionen in (b) und ihre Ableitungen. Zeigen Sie, dass die Funktionen in (c) die selben sind wie die hyperbolischen Umkehrfunktionen in (b).

Hausaufgabenabgabe: Dienstag, 07.01.2020, vor Beginn der Zentralübung