TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

Prof. Dr. M. Wolf
Dr. M. Prähofer

Mathematik für Physiker 2 (Analysis 1) MA9202

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9202_2019W

WS 2019/20
Blatt 7
(26.11.2019)

Zentralübung

Z7.1. Wurzelkriterium

(a) $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \implies \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut.

(b) $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \implies \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ ist divergent.

(c) Man gebe je ein Beispiel für eine absolut konvergente, eine konvergente, aber nicht absolut konvergente und eine divergente Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ an mit $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$.

Z7.2. Die verallgemeinerten Binomialkoeffizienten

Wir definieren den Binomialkoeffizienten $\binom{z}{k}$ für beliebiges $z \in \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{Z}$ als Polynom vom Grad k:

$$\binom{z}{k} = \begin{cases} \prod\limits_{j=1}^{k} \frac{z-j+1}{j} = \frac{z(z-1)\cdots(z-k+1)}{k!} & \text{für } k > 0, \\ 0 & \text{für } k < 0. \end{cases}$$

Erinnerung: Stimmen zwei Polynome p und q vom Grad $\leq n$ in mindestens $n+1$ Punkten überein, so sind sie gleich. Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe H3.2.:

(a) $\binom{z}{k} = \binom{z-1}{k-1} + \binom{z-1}{k}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{Z}$.

(b) $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{w}{k}\binom{z}{n-k} = \binom{w+z}{n}$ für $w, z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0$. *Hinweis:* Betrachte zunächst $w, z \in \mathbb{N}_0$.

(c) Der Konvergenzradius von $f_\alpha(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$ ist 1, falls $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}_0$.

Z7.3. Die Exponentialfunktion als Limes

Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine komplexe Folge mit Grenzwert $z \in \mathbb{C}$. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{z_n}{n})^n = \exp(z)$.

Präsenzaufgaben

P7.1. Konvergenzradius

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} z^n$,

(b) $z + z^2 + z^4 + z^8 + \cdots$.

P7.2. Konvergenzradius

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen ($k \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$):

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{q^n} z^n$

(b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$,

und folgern Sie daraus: (i) für $k \in \mathbb{Z}$ und $q > 1$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{q^n} = 0$ und (ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{\frac{n}{e}} = 1$.

P7.3. Exponentialfunktion und Verwandte

(a) Wie lauten die Additionstheoreme für exp, sin und cos, sinh und cosh (letztere mit Herleitung)?

(b) Begründen Sie, dass $\cosh(x) \geq 1$ für $x \in \mathbb{R}$ und $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend ist.

(c) Zeigen Sie, dass $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ keine Nullstellen hat.

(d) Beweisen Sie für alle $z \in \mathbb{C}$, dass $\sin(z) = \cos(z - \frac{\pi}{2})$ gilt.

(e) Bestimmen Sie alle Nullstellen von $\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Hausaufgaben

H7.1. Cauchy-Produktformel für Geometrische Reihen

(a) Bestimmen Sie das Cauchy-Produkt von $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ mit sich selbst ($|q| < 1$).

(b) Berechnen Sie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} nq^n$ für $|q| < 1$.

(c) Was ist $\frac{0}{1} + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \cdots$?

H7.2. Konvergenzradius

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen, wobei $a \in \mathbb{R}$:

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a^{n^2} z^n$,

(b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a^n z^{n^2}$,

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n a}{n}\right)^{n^2} z^n$,

(d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\prod\limits_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{a}{k}\right)^k \right) z^n$.

H7.3. Die verallgemeinerten Binomialkoeffizienten

Sei $f_\alpha(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$. Man zeige:

(a) Für $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$ gilt $f_\alpha(z) f_\beta(z) = f_{\alpha+\beta}(z)$.

(b) Für $n \in \mathbb{Z}$, $|z| < 1$ gilt $(1 + z)^n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} z^k$.

Hausaufgabenabgabe: Dienstag, 10.12.2019, vor Beginn der Zentralübung