TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Zentrum Mathematik

Prof. Dr. M. Wolf
Dr. M. Prähofer

Mathematik für Physiker 2 (Analysis 1) MA9202

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9202_2019W

WS 2019/20
Blatt 5
(12.11.2019)

Zentralübung

Z5.1. Einfache Grenzwerte

Begründen Sie anhand der Definitionen:

(a) $\frac{1}{n} \to 0$, (b) $(-1)^n$ ist divergent, (c) $\sqrt{n} \to \infty$, (d) $x > 0 \Rightarrow \sqrt[n]{x} \to 1$,

Z5.2. Rekursionsformel zur Berechnung von $\sqrt{a}$ für $a > 0$.

Zur Erinnerung: Für $k \in \mathbb{N}$, $a > 0$ wird diejenige reelle Zahl $w > 0$ für die $w^k = a$ gilt, mit $\sqrt[k]{a}$ bezeichnet, wobei $\sqrt{a} := \sqrt[2]{a}$ ist.
Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ durch $x_0 := a$, $x_{n+1} := \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$ für $n \in \mathbb{N}_0$ definiert. Dann gilt $x_n \to \sqrt{a}$.

Z5.3. Eine Diagonalfolge

Beweisen Sie $\sqrt[n]{n} \to 1$.

Präsenzaufgaben

P5.1. Die geometrische Folge

Für $q \in \mathbb{R}$ definieren wir $Q := \{q^n : n \in \mathbb{N}\}$. Zeigen Sie:

(a) Für $q > 1$ ist Q unbeschränkt.

(b) Für $0 < q < 1$ ist $\inf Q = 0$.

(c) Für $0 < q < 1$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$

(d) Für $|q| < 1$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$

Hinweis: (a) Bernoulli-Ungleichung, (d) Einschließungskriterium.

P5.2. Grenzwerte

Seien $x, y \in \mathbb{R}^+ = \{u \in \mathbb{R} \mid u > 0\}$. Bestimmen Sie mit Hilfe der Rechenregeln und dem Einschließungskriterium jeweils den Grenzwert der folgenden Folgen:

(a) $\frac{1}{\sqrt{n}}$, (b) $\frac{2n^2-3n+5}{5n^2+7n-1}$ (c) $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$, (d) $(x^n + y^n)^{1/n}$.

P5.3. Die dritte Wurzel

Sei $y \in \mathbb{R}$, $y > 1$, $f(x) = \frac{1}{3}(2x + \frac{y}{x^2})$. und (x_n) die rekursiv definierte Folge mit $x_1 := y$, $x_{n+1} := f(x_n)$.

(a) Skizzieren Sie, z.B. für $y = 2$, den Graphen von $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$. Begründen Sie mit Schulwissen warum $y^{1/3} \le f(x) \le x$ für $x \ge y^{1/3}$ gilt.

(b) Zeigen Sie: Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nach unten beschränkt und monoton fallend.

(c) Warum konvergiert (x_n) gegen $y^{1/3}$?

(d) Wie muss man f wählen, um auf die gleiche Weise die k-te Wurzel von y zu erhalten?

Hausaufgaben

H5.1. Nullfolgen

Eine (komplexwertige) Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \to 0$ heißt **Nullfolge**. Zeigen Sie:

(a) $a_n \to a \iff (|a_n - a|)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Nullfolge.

(b) Ist (a_n) Nullfolge und (b_n) beschränkt, dann ist $(a_n b_n)$ Nullfolge.

(c) Ist $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ so gilt: (a_n) ist Nullfolge, genau dann, wenn $\frac{1}{a_n} \to \infty$.

H5.2. Die Fibonacci-Zahlen und der Goldene Schnitt

Seien $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, $n \in \mathbb{N}$, die Fibonacci-Zahlen und $q_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

(a) Warum gilt $a_n \to \infty$?

(b) Wie lautet die Rekursionsformel für die q_n?

(c) Bestimmen Sie anhand des Graphen von $x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$ und der Winkelhalbierenden die q_n zeichnerisch.

(d) Zeigen Sie, dass (q_n) gegen den Goldenen Schnitt $q := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ konvergiert.

H5.3. Die Zinseszinsformel

Sei $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$, $n \in \mathbb{N}$.

a) (a_n) ist streng monoton steigend.
Hinweis: Man betrachte $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ und verwende die Bernoulli-Ungleichung.

b) (a_n) ist beschränkt.
Hinweis: Binomische Formel. Warum gilt $\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \le \frac{1}{k!} \le \frac{2}{2^k}$?

Hausaufgabenabgabe: Dienstag, 26.11.2019, vor Beginn der Zentralübung