Prof. Dr. M. Wolf
Dr. M. Prähofer

Mathematik für Physiker 2
(Analysis 1) MA9202

WS 2019/20
Blatt 4
(05.11.2019)

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9202_2019W

Zentralübung

Z4.1. Linearfaktorabspaltung und Nullstellenzahl

Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein beliebiger Körper. Für $n \in \mathbb{N}_0$, $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$, $a_n \neq 0$, heißt $p : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$,

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0,$$

ein **Polynom vom Grad** n. $z_0 \in \mathbb{K}$ heißt **Nullstelle von** p, wenn $p(z_0) = 0$ ist. Zeige:

(a) Ist p ein Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$ mit der Nullstelle $z_0 \in \mathbb{K}$, so gibt es ein Polynom q vom Grad $n-1$, so dass $\forall z \in \mathbb{K} : p(z) = (z - z_0) q(z)$.

(b) Ein Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$ besitzt höchstens n Nullstellen.

Z4.2. Die Argumentfunktion

Die Argumentfunktion $\arg : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to (-\pi, \pi]$ ordnet jeder komplexen Zahl $z \neq 0$ denjenigen Winkel $\varphi \in (-\pi, \pi]$ zu, für den $z = |z|(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ gilt. Geometrisch ist das in der komplexen Zahlenebene der vorzeichenbehaftete Winkel zwischen der Strecke vom Ursprung zu $x + \mathrm{i}y$ und der positiven reellen Achse.

(a) Geben Sie $\arg(x + \mathrm{i}y)$ mit Hilfe der inversen trigonometrischen Funktionen an.

(b) Wie lautet die komplexe Zahl z in kartesischer Darstellung $x + \mathrm{i}y$ und in Polardarstellung $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ und wie kann man beide Darstellungen ineinander umwandeln?

Z4.3. Eigenschaften von Konjugation und Betrag

Man zeige für $w, z \in \mathbb{C}$, $\varphi \in \mathbb{R}$:

(a) $\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}$,	(c) $\overline{\overline{z}} = z$,	(e) $\bar{w} \cdot \bar{z} = \overline{wz}$,	(g) $\lvert\overline{z}\rvert = \lvert z\rvert$,
(b) $\lvert\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\rvert = 1$,	(d) $\bar{w} + \bar{z} = \overline{w + z}$,	(f) $\lvert z\rvert^2 = z \cdot \overline{z}$,	(h) $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{\lvert z\rvert^2}$, $z \neq 0$.

Präsenzaufgaben

P4.1. Faktorisierung komplexer Polynome

Beweisen Sie unter Benutzung des **Fundamentalsatzes der Algebra**

Jedes nichtkonstante Polynom mit komplexen Koeffizienten besitzt eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

die folgende Aussage:
Für jedes komplexe Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$ gibt es $c, z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$, so dass

$$p(z) = c(z - z_1) \cdots (z - z_n)$$

(wobei die z_k genau die, nicht notwendigerweise verschiedenen, Nullstellen von p sind).

P4.2. Darstellung komplexer Zahlen

Geben Sie folgende komplexe Zahlen jeweils in kartesischer und Polardarstellung an:

(a) $1 + \mathrm{i}$, (b) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$, (c) $\frac{1}{\mathrm{i}}$, (d) $(1 + \mathrm{i})^2$, (e) $\left(\frac{1+5\mathrm{i}}{2-3\mathrm{i}}\right)^{19}$, (f) Lösungen von $z^2 = \mathrm{i}$.

P4.3. Geometrie der komplexen Ebene

(a) Skizzieren Sie die Menge $\{z \in \mathbb{C} : |z - \frac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{2}| \leq 1\}$.

(b) Ein regelmäßiges Sechseck in der rechten Hälfte der komplexen Ebene habe zwei benachbarte Ecken, die auf 0 und i liegen. Geben Sie die Menge der Eckpunkte dieses Sechsecks (i) als Lösung einer Polynomgleichung, (ii) explizit mittels Polardarstellung und (iii) als Aufzählung in kartesischer Form an.

Hausaufgaben

H4.1. Die n-ten Einheitswurzeln

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit der Polardarstellung $c = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ mit $r > 0$ und $\varphi \in (-\pi, \pi]$.

(a) Man zeige $\{z \in \mathbb{C} \,|\, z^n - 1 = 0\} = \big\{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\frac{k}{n}} \,|\, k \in \{0, \ldots, n-1\}\big\}$.

(b) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $z^n = c$ und skizzieren Sie diese exemplarisch für $n = 6$ und $c = \mathrm{i}$.

H4.2. Darstellung komplexer Zahlen

Geben Sie folgende komplexe Zahlen jeweils in kartesischer und Polardarstellung möglichst explizit an:

(a) $(1+\frac{1}{\mathrm{i}})^{-1}$, (b) $(1+\mathrm{i})\, e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$, (c) $\big(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\big)^{2019}$, (d) Lsgn von $z^2 = 3+4\mathrm{i}$.

H4.3. Geometrie der komplexen Ebene

Sei $K := \{\frac{1}{1+\mathrm{i}t} \,|\, t \in \mathbb{R}\}$.

(a) Skizzieren Sie die Menge $\{\frac{1}{1+\mathrm{i}t} \,|\, t \in \mathbb{Z}\}$.

(b) Zeigen Sie, dass K auf einem Kreis liegt: $K = \{x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \,|\, (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}\}$.

Hinweis: Offenbar ist $K = \{x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(\frac{1}{x+\mathrm{i}y}) = 1\}$.

Hausaufgabenabgabe: Dienstag, 19.11.2019, vor Beginn der Zentralübung