Prof. Dr. M. Wolf
Dr. M. Prähofer

Mathematik für Physiker 2 (Analysis 1) MA9202

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9202_2019W

WS 2019/20
Blatt 2
(22.10.2019)

Zentralübung

Z2.1. Spezifikation von Mengen

Spezifizieren Sie die folgenden Mengen möglichst explizit:

(a) die Menge Q aller Quadratzahlen zwischen 100 und 400,

(b) die Menge L der Lösungen der Gleichung $x^4 - x^3 - 2x^2 + x + 1 = 0$,

(c) die Menge C der Paare $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ für die $x^2 + y^2 = 1$ gilt.

Z2.2. $+\infty$ als obere Schranke

Sei $(M, <)$ eine geordnete Menge mit der Supremumseigenschaft. Mit $+\infty$ sei ein weiteres Objekt bezeichnet, das nicht in M enthalten ist. Wir definieren $M' := M \cup \{+\infty\}$ und $<' := < \cup \{(a, +\infty) \,|\, a \in M\}$. Das Supremum bezüglich $(M', <')$ werde mit $\sup'$ bezeichnet.

(a) $(M', <')$ ist eine geordnete Menge und besitzt die Supremumseigenschaft.

(b) Alle Teilmengen von M' sind nach oben beschränkt (bezüglich $<'$).

(c) Ist $N \subseteq M$ beschränkt bezüglich $<$, dann gilt $\sup N = \sup' N$.

(d) Für $N \subseteq M$ gilt: N ist beschränkt $\iff \sup' N <' +\infty$.

Z2.3. Ein Kriterium für Surjektivität, Injektivität und Bijektivität

Seien X, Y beliebige Mengen und $f : X \to Y$ eine beliebige Abbildung. Zeigen Sie:

(a) $f : X \to Y$ ist surjektiv $\iff \forall y \in Y : |f^{-1}(\{y\})| \geq 1$

(b) $f : X \to Y$ ist injektiv $\iff \forall y \in Y : |f^{-1}(\{y\})| \leq 1$

(c) $f : X \to Y$ ist bijektiv $\iff \forall y \in Y : |f^{-1}(\{y\})| = 1$

Präsenzaufgaben

P2.1. Abbildungen

Sei $f : M \to N$ eine beliebige Abbildung. Seien $A, B \subseteq M$ und $C, D \subseteq N$: Beweisen Sie:

(a) $f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D) = f^{-1}(C \cap D)$,

(b) $f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D) = f^{-1}(C \cup D)$,

(c) $f(A) \cup f(B) = f(A \cup B)$,

(d) $f(A) \cap f(B) \supseteq f(A \cap B)$,

(e) $C \subseteq D \implies f^{-1}(C) \subseteq f^{-1}(D)$,

(f) $A \subseteq B \implies f(A) \subseteq f(B)$.

Finden Sie Beispiele dafür, dass in (d) nicht Gleichheit und in (f) nicht Äquivalenz gezeigt werden kann.

P2.2. Monotone Abbildungen

Seien $(M, <)$, $(N, <)$ geordnete Mengen.
Eine Funktion $f : M \to N$ heißt **streng monoton wachsend**, wenn gilt

$$\forall x, y \in M : \big(x < y \Rightarrow f(x) < f(y)\big).$$

Man zeige: Jede streng monoton wachsende Funktion ist injektiv.

P2.3. Funktionen

Seien $M = \{1, 2\}$ und $N = \{1, 2, 3\}$.

(a) Wieviele Funktionen $f : M \to N$ gibt es? Wieviele davon sind injektiv/surjektiv?

(b) Wieviele Funktionen $f : N \to M$ gibt es? Wieviele davon sind injektiv/surjektiv?

(c) Wieviele Funktionen $f : M \to M$ gibt es? Wieviele davon sind bijektiv?

(d) Wieviele Funktionen $f : N \to N$ gibt es? Wieviele davon sind bijektiv?

Hausaufgaben

H2.1. Komposition injektiver Funktionen

Man beweise oder widerlege, dass für beliebige Abbildungen $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ mit nichtleeren Mengen X, Y, Z gilt:

(a) Sind f und g injektiv, dann ist auch $g \circ f$ injektiv.

(b) Ist $g \circ f$ injektiv, dann ist auch f injektiv.

(c) Sind $g \circ f$ und f injektiv, dann ist auch g injektiv.

H2.2. Graph einer Parabel

Sei $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto ax^2 + bx + c$.

(a) Bringen Sie f auf Scheitelform und skizzieren Sie den Graphen.

(b) Ist f surjektiv oder injektiv?

(c) Definieren Sie zwei bijektive Funktionen f_+, f_-, deren Graphen den Graph von f überdecken.

(d) Geben Sie die Umkehrfunktionen f_+^{-1}, f_-^{-1} an.

H2.3. Kombinatorik

Seien M und N endliche Mengen, M habe m Elemente und N bestehe aus n Elementen, $m, n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente von

(a) $M \times N$, (b) N^M, (c) $\{f \in N^M \mid f \text{ ist injektiv}\}$, (d) $\{f \in N^M \mid f : M \to N \text{ ist bijektiv}\}$.

Hausaufgabenabgabe: Dienstag, 5.11.2019, vor Beginn der Zentralübung