MA9202 Mathematik für Physiker 2 (Analysis 1), Prof. Dr. M. Keyl
Probeklausur, 18.12.15, 8.30 – 10.00

Hilfsmittel: ein selbsterstelltes DIN-A4 Blatt. Bei Multiple-Choice-Aufgaben sind **genau** die zutreffenden Aussagen anzukreuzen. Bei Aufgaben mit Kästen werden nur die Resultate **in diesen Kästen** berücksichtigt. Aufgaben ohne Kästen lösen Sie bitte auf einem separaten Bogen.

1. **Vollständige Induktion** **[8 Punkte]**

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$ die folgende Aussage:

$$\sum_{k=1}^{n-1} k!k = n! - 1$$

LÖSUNG:

Induktionsbeginn ($n = 1$): $\sum_{k=1}^{n-1} k!k = 0 = 1! - 1$ (leere Summe)

Induktionsschritt ($n \to n+1$):

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k!k &\overset{\textbf{[2]}}{=} \sum_{k=1}^{n-1} k!k + n!n \\ &\overset{\text{I.V.}\textbf{[2]}}{=} n! - 1 + n!n \\ &\overset{\textbf{[1]}}{=} (n+1)n! - 1 \\ &\overset{\textbf{[1]}}{=} (n+1)! - 1 \end{aligned}$$

□

Erklärung:
[2 Punkte] für den Induktionsbeginn,
[2 Punkte] für das Zerlegen,
[2 Punkte] für das Einsetzen der Induktionsvoraussetzung,
[2 Punkte] für das Zusammenfassen.

2. **Komplexe Zahlen** **[6 Punkte]**

(a) Geben Sie $z = 3i + \frac{(2-i)^2}{1+i}$ in Polardarstellung, $r\,e^{i\phi}$, $r \in \mathbb{R}^+$, $\phi \in (-\pi, \pi]$, an. **[3]**

$$z = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{3}{4}\pi}}$$

(b) Geben Sie Real- und Imaginärteil von $\sqrt[3]{i}$ an. **[3]**

$$\sqrt[3]{i} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \mathrm{i} \boxed{\frac{1}{2}}$$

LÖSUNG:

(a) $z = 3i + \frac{(2-i)^2}{1+i} = 3i + \frac{4-4i-1}{1+i} = 3i + \frac{(3-4i)(1-i)}{2} = 3i + \frac{3-4-7i}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{3}{4}\pi}$

(b) $\sqrt[3]{i} = (e^{i\frac{\pi}{2}})^{1/3} = e^{i\frac{\pi}{6}} = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$.

3. **Konvergenz von Folgen und Reihen** **[7 Punkte]**

(a) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$ **[2]**

☐ $=-\infty$ ☐ $=0$ ☒ $=\frac{1}{2}$ ☐ $=1$ ☐ $=\infty$ ☐ existiert nicht

(b) $\lim_{n\to\infty}\sin\left(\frac{n^2+1}{n+5}\right)\log\left(\frac{n^2+5}{n^2+3}\right)$ **[3]**

☐ $=-\infty$ ☐ $=-1$ ☒ $=0$ ☐ $=1$ ☐ $=\infty$ ☐ existiert nicht

(c) Welchen Wert besitzt die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n-1}{3^n}$? **[2]**

☐ $-\frac{3}{2}$ ☐ -1 ☐ 0 ☐ 1 ☒ $\frac{3}{2}$ ☐ 3 ☐ ∞ ☐ undefiniert

LÖSUNG:

(a) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}=\frac{1}{2}$.

(b) Die Folge $\log\left(\frac{n^2+5}{n^2+3}\right)$ konvergiert gegen 0, da das Argument des log gegen 1 konvergiert und log dort stetig ist. Der Faktor $\sin\left(\frac{n^2+1}{n+5}\right)$ ist vom Betrag durch 1 beschränkt und ändert nichts an der Konvergenz gegen 0.

(c) Es handelt sich um die Differenz zweier geometrischer Reihen:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n-1}{3^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

4. **Potenzreihen** **[6 Punkte]**

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3}{2^n}x^n$.

LÖSUNG:

$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^3}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{3/n}}{2}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(n^{1/n})^3=\frac{1}{2}$. Der Konvergenzradius ist also 2.

5. **Stetige Funktionen** **[8 Punkte]**

Die Temperaturverteilung eines dünnen Metallrings entlang seines Umfangs kann als stetige Funktion $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ mit $f(0)=f(2\pi)$ aufgefasst werden. Zeigen Sie, dass es mindestens ein Paar entgegengesetzter Punkte auf dem Ring gibt, die exakt die gleiche Temperatur haben.
Hinweis: Man betrachte $f(x)-f(x+\pi)$ auf $[0,\pi]$.

LÖSUNG:

Wir betrachten die Funktion $F:[0,\pi]\to\mathbb{R}$, $F(x)=f(x)-f(x+\pi)$. **[1]**

Es ist $F(0)=f(0)-f(\pi)$ und $F(\pi)=f(\pi)-f(2\pi)=-F(0)$. **[2]**

Entweder sind beide Randwerte also Null, oder Sie haben unterschiedliches Vorzeichen. **[2]**

Da F wie f stetig ist, gibt es nach dem Zwischenwertsatz mindestens eine Nullstelle x_0 von F in $[0,\pi]$. **[2]**

Somit gilt $f(x_0)=f(x_0+\pi)$. **[1]**

6. **Ableitungen** **[9 Punkte]**

Berechnen Sie die ersten und zweiten Ableitungen der folgenden Funktionen für alle Punkte im jeweils maximalen Definitionsbereich $\subset \mathbb{R}$.

$f_1(x) = xe^{\cos(x)}$, $\boxed{f_1'(x) = e^{\cos(x)} - x\, e^{\cos(x)}\, \sin(x)}$ **[1]**

$\boxed{f_1''(x) = x\, e^{\cos(x)} \sin(x)^2 - 2\, e^{\cos(x)}\, \sin(x) - x\, e^{\cos(x)}\, \cos(x)}$ **[2]**

$f_2(x) = \ln\left(\sqrt{x^2+1}\right)$, $\boxed{f_2'(x) = \frac{x}{x^2+1}}$ **[1]**

$\boxed{f_2''(x) = \frac{1}{x^2+1} - \frac{2\,x^2}{(x^2+1)^2}}$ **[2]**

$f_3(x) = x^2 \tan(x)$, $\boxed{f_3'(x) = 2\,x\, \tan(x) + x^2 \sec(x)^2}$ **[1]**

$\boxed{f_3''(x) = 2\,x^2 \sec(x)^2\, \tan(x) + 2\, \tan(x) + 4\,x \sec(x)^2}$ **[2]**

7. **Funktionenfolgen** **[10 Punkte]**

Für die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \arctan(nx)$ gilt:

(a) (f_n) konvergiert punktweise gegen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mit **[3]**

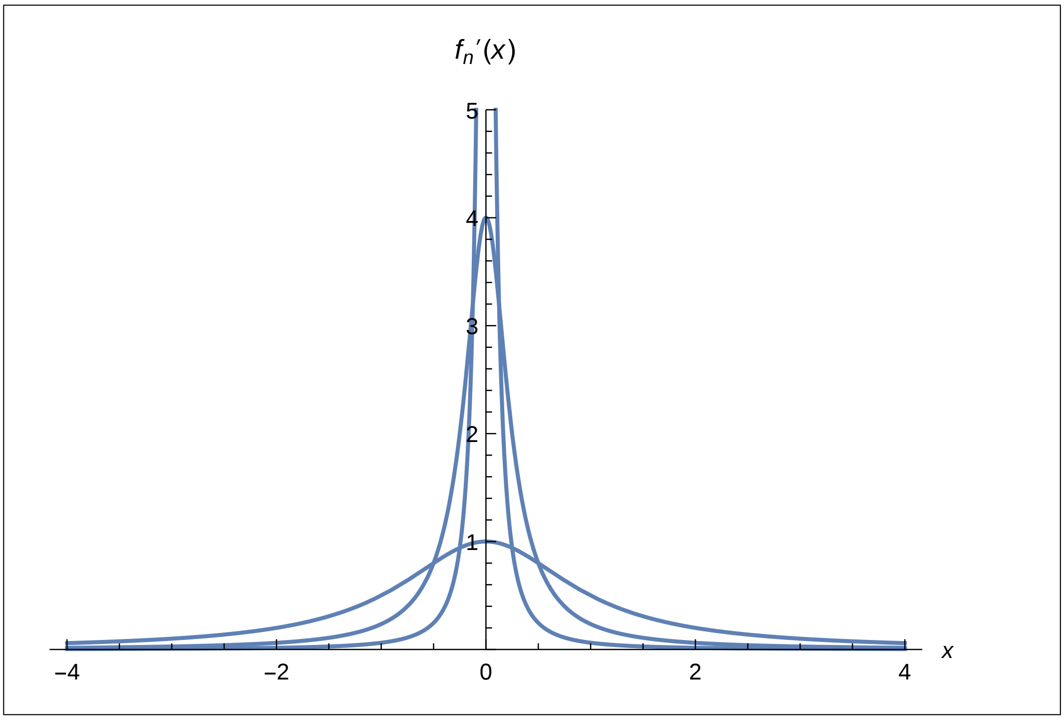
$$\boxed{f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & x < 0 \end{cases}}$$

(b)
- ☐ Weil f stetig ist, konvergiert (f_n) gleichmäßig gegen f.
- ☐ Weil f stetig ist, konvergiert (f_n) nicht gleichmäßig gegen f.
- ☐ Weil f unstetig ist, konvergiert (f_n) gleichmäßig gegen f.
- ☒ Weil f unstetig ist, konvergiert (f_n) nicht gleichmäßig gegen f.

[2]

(c) Berechnen Sie die Ableitungen $f_n'(x)$ und skizzieren Sie sie. **[2]**

$$\boxed{f_n'(x) = \frac{n}{1+(nx)^2}}$$



[3]

LÖSUNG:

(a) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \arctan(nx) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & x < 0 \end{cases}.$

(b) Wäre die Konvergenz sogar gleichmäßig, so müßte f stetig sein. Da dies nicht der Fall ist, kann die Konvergenz nicht gleichmäßig sein.

(c) s.o.