Name:		Tutorgruppe:	

MA9202 Mathematik für Physiker 2 (Analysis 1), Prof. Dr. M. Keyl
Probeklausur, 18.12.15, 8.30 – 10.00

Hilfsmittel: ein selbsterstelltes DIN-A4 Blatt. Bei Multiple-Choice-Aufgaben sind **genau** die zutreffenden Aussagen anzukreuzen. Bei Aufgaben mit Kästen werden nur die Resultate **in diesen Kästen** berücksichtigt. Aufgaben ohne Kästen lösen Sie bitte auf einem separaten Bogen.

1. **Vollständige Induktion** **[8 Punkte]**

   Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$ die folgende Aussage:

$$\sum_{k=1}^{n-1} k!k = n! - 1$$

2. **Komplexe Zahlen** **[6 Punkte]**

   (a) Geben Sie $z = 3i + \frac{(2-i)^2}{1+i}$ in Polardarstellung, $r\,e^{i\phi}$, $r \in \mathbb{R}^+$, $\phi \in (-\pi, \pi]$, an.

$$z = \boxed{}$$

   (b) Geben Sie Real- und Imaginärteil von $\sqrt[3]{i}$ an.

$$\sqrt[3]{i} = \boxed{} + \mathrm{i}\boxed{}$$

3. **Konvergenz von Folgen und Reihen** **[7 Punkte]**

   (a) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n} - n\right)$

   ☐ $= -\infty$ ☐ $= 0$ ☐ $= \frac{1}{2}$ ☐ $= 1$ ☐ $= \infty$ ☐ existiert nicht

   (b) $\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{n^2+1}{n+5}\right) \log\left(\frac{n^2+5}{n^2+3}\right)$

   ☐ $= -\infty$ ☐ $= -1$ ☐ $= 0$ ☐ $= 1$ ☐ $= \infty$ ☐ existiert nicht

   (c) Welchen Wert besitzt die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n - 1}{3^n}$?

   ☐ $-\frac{3}{2}$ ☐ -1 ☐ 0 ☐ 1 ☐ $\frac{3}{2}$ ☐ 3 ☐ ∞ ☐ undefiniert

4. **Potenzreihen** **[6 Punkte]**

   Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{2^n} x^n$.

5. **Stetige Funktionen** **[8 Punkte]**

   Die Temperaturverteilung eines dünnen Metallrings entlang seines Umfangs kann als stetige Funktion $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = f(2\pi)$ aufgefasst werden. Zeigen Sie, dass es mindestens ein Paar entgegengesetzter Punkte auf dem Ring gibt, die exakt die gleiche Temperatur haben.
   Hinweis: Man betrachte $f(x) - f(x + \pi)$ auf $[0, \pi]$.

6. **Ableitungen** **[9 Punkte]**

Berechnen Sie die ersten und zweiten Ableitungen der folgenden Funktionen für alle Punkte im jeweils maximalen Definitionsbereich $\subset \mathbb{R}$.

$f_1(x) = xe^{\cos(x)}$, $f_1'(x) =$

$f_1''(x) =$

$f_2(x) = \ln\left(\sqrt{x^2+1}\right)$, $f_2'(x) =$

$f_2''(x) =$

$f_3(x) = x^2 \tan(x)$, $f_3'(x) =$

$f_3''(x) =$

7. **Funktionenfolgen** **[10 Punkte]**

Für die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \arctan(nx)$ gilt:

(a) (f_n) konvergiert punktweise gegen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mit

$f(x) =$

(b) ☐ Weil f stetig ist, konvergiert (f_n) gleichmäßig gegen f.
☐ Weil f stetig ist, konvergiert (f_n) nicht gleichmäßig gegen f.
☐ Weil f unstetig ist, konvergiert (f_n) gleichmäßig gegen f.
☐ Weil f unstetig ist, konvergiert (f_n) nicht gleichmäßig gegen f.

(c) Berechnen Sie die Ableitungen $f_n'(x)$ und skizzieren Sie sie.

$f_n'(x) =$

Viel Erfolg!