. . . .
Note

Name

Vorname

Matrikelnummer

Studiengang (Hauptfach)

Fachrichtung (Nebenfach)

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
Σ		

I . . . .
Erstkorrektur

II . . . .
Zweitkorrektur

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Fakultät für Mathematik

Klausur
MA9202 Mathematik für Physiker 2
(Analysis 1)

Prof. Dr. M. Keyl

9. Februar 2016, 10:30 – 12:00 Uhr

Hörsaal: . . . . Reihe: . . . . Platz: . . . .

Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **9** Aufgaben

Bearbeitungszeit: **90** min

Erlaubte Hilfsmittel: **ein** selbsterstelltes DIN A4 Blatt

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von . . . . bis . . . .

Vorzeitig abgegeben um . . . .

Besondere Bemerkungen:

Musterlösung (mit Bewertung)

1. **Vollständige Induktion** **[8 Punkte]**

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass

(a) $4^n + 5$ ist für alle $n \in \mathbb{N}_0$ durch 3 teilbar.

(b) $4^n + 15n - 1$ ist für alle $n \in \mathbb{N}_0$ durch 9 teilbar. *Hinweis:* Benutzen Sie Teil (a).

LÖSUNG:

(a) *Induktionsbeginn:* $4^0 + 5 = 1 + 5 = 6$ ist ohne Rest durch 3 teilbar. **[1]**

Induktionsschritt: $4^{n+1} + 5 = 4 \cdot 4^n + 5 = (4^n + 5) + 3 \cdot 4^n$ **[1]**. Der erste Summand ist nach Voraussetzung durch 3 teilbar, der zweite ist ein Vielfaches von 3. **[1]**

(b) *Induktionsbeginn:* $4^0 + 15 \cdot 0 - 1 = 0$ ist ohne Rest durch 9 teilbar. **[1]**

Induktionsschritt:

$$4^{n+1} + 15(n+1) - 1 = (4^n + 15n - 1) + 3 \cdot 4^n + 15 = (4^n + 15n - 1) + 3(4^n + 5). \textbf{ [2]} \qquad (*)$$

Der erste Summand ist nach Voraussetzung durch 9 teilbar **[1]**. Nach Teil (a) ist $4^n + 5$ durch 3 teilbar. Also ist auch der zweite Summand in $(*)$ durch 9 teilbar **[1]**.

2. **Komplexe Zahlen** **[8 Punkte]**

(a) Bestimmen Sie Real– und Imaginärteil von $\sqrt{8+6i}$

$\mathrm{Re}\left(\sqrt{8+6i}\right) = \quad 3$ **[2]**	$\mathrm{Im}\left(\sqrt{8+6i}\right) = \quad 1$ **[2]**

(b) Geben Sie Betrag und Argument von $\left(1-\frac{\sqrt{3}}{i}\right)^{-1}$ an.

$\left\lvert\left(1-\frac{\sqrt{3}}{i}\right)^{-1}\right\rvert = \quad \frac{1}{2}$ **[2]**	$\arg\left(\left(1-\frac{\sqrt{3}}{i}\right)^{-1}\right) = \quad -\frac{\pi}{3}$ **[2]**

LÖSUNG:

(a) Wir machen den Ansatz $(a+ib)^2 = 8+6i$. Also: $a^2-b^2+2iab = 8+6i \Rightarrow a^2-b^2 = 8$ und $ab = 3$. Offenbar ist $a \neq 0$ also: $b = 3/a$ und damit: $a^2 - 9/a^2 = 8 \Rightarrow a^4 - 8a^2 - 9 = 0$. Dies führt zu den beiden Lösungen $a^2 = 9$ und $a^2 = -1$. Da a reell ist muss $a = \pm 3$ gelten. Damit ist dann $b = \pm 1$ und wir erhalten $\sqrt{8+6i} = \pm(3+i)$.

(b) Es ist

$$\frac{1}{1-\frac{\sqrt{3}}{i}} = \frac{1}{1+\sqrt{3}i} = \frac{1}{4}(1-i\sqrt{3})$$

Dies führt zu

$$\left\lvert\frac{1}{1-\frac{\sqrt{3}}{i}}\right\rvert = \frac{1}{4}\sqrt{1+3} = \frac{1}{2}$$

und

$$\arg\left(\frac{1}{1-\frac{\sqrt{3}}{i}}\right) = \arctan(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$$

3. **Konvergenz von Folgen und Reihen** **[6 Punkte]**

(a) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{n\to\infty}\big(\ln(n^4+n^2)-4\ln(n)\big)$. **[2]**

☐ $=-\infty$ ☒ $=0$ ☐ $=\ln(2)$ ☐ $=\frac{1}{2}$ ☐ $=1$ ☐ $=\infty$ ☐ existiert nicht

(b) Gegen welchen Wert ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{e^n}$ eigentlich oder uneigentlich konvergent? **[2]**

☐ $\frac{1}{2}$ ☐ 1 ☐ 3 ☐ 0 ☐ $\frac{3}{7}$ ☐ $\frac{4}{7}$ ☒ ∞ ☐ keiner der angegebenen Werte

(c) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n^2\pi}}{n(n+1)}$ ist **[2]**

☒ konvergent ☒ absolut konvergent ☐ bestimmt divergent ☐ undefiniert

LÖSUNG:

(a) Es ist:

$$\ln(n^4+n^2)-4\ln(n)=\ln(n^4+n^2)-\ln(n^4)=\ln\left(\frac{n^4+n^2}{n^4}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$$

Da $\lim_{n\to\infty}(1+n^{-2})=1$ folgt mit der Stetigkeit des Logarithmus $\lim_{n\to\infty}\ln(n^4+n^2)-4\ln(n)=0$.

(b) Für $n\geq 3$ is $n/e>1$. Daher ist $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{e}\right)^n$ eine divergente Minorante.

(c) Wegen

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n^2\pi}}{n(n+1)}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

ist die Reihe absolut konvergent, also auch konvergent.

4. **Konvergenzkriterien** **[10 Punkte]**

Prüfen Sie mit dem Wurzel-, Quotienten- und Majorantenkriterium nach, ob die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k}$ konvergiert.

LÖSUNG:

Wurzelkriterium: Wegen

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad \textbf{[2]}$$

konvergiert die Folge nach dem Wurzelkriterium.

Quotietenkriterium: Es ist:

$$\frac{\frac{1}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{1}{n^n}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \frac{1}{n+1} \qquad \textbf{[3]}$$

Der erste Faktor konvergiert gegen $1/e$ **[1]** der zweite gegen 0. Damit konvergiert die Reihe nach dem Quotientenkriterium **[1]**.

Majorantenkriterium: Es gilt (z.B.) die Abschätzung:

$$\frac{1}{n^n} \leq \frac{1}{2^n} \quad \forall n \geq 2 \qquad \textbf{[2]}$$

Da die Reihe $\sum_n 2^{-n}$ konvergiert, konvergiert auch $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k}$. **[1]**

5. **Grenzwerte von Funktionen, stetige Fortsetzbarkeit** **[7 Punkte]**

(a) Bestimmen sie den Grenzwert $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(\ln x)}{\sqrt{\ln(x)}}$. **[4]**

(b) Begründen Sie warum die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2+3x+2}{x^2-1}$ stetig ist und geben Sie mögliche stetige Fortsetungen in den Punkten ± 1 an. **[3]**

LÖSUNG:

(a) Wir benutzen die L'Hospitalsche Regel:

$$\frac{d}{dx} \ln(\ln(x)) = \frac{1}{x \ln(x)} \qquad \frac{d}{dx} \sqrt{\ln(x)} = \frac{1}{2x\sqrt{\ln(x)}} \quad \textbf{[1+1]}$$

Also:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(\ln(x))}{\sqrt{\ln(x)}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x\sqrt{\ln(x)}}{x \ln(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{\ln(x)}} = 0 \quad \textbf{[2]}$$

Alternative Lösung: Da $\lim_{x\to\infty} \ln(x) = \infty$ reicht es $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ zu betrachten. **[1]** Dann ist mit

$$\frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x} \quad \frac{d}{dx} \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \textbf{[1]}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0 \quad \textbf{[2]}$$

(b) Die Abbildung ist eine rationale Funktion und daher für alle $x \in \mathbb{R}$ stetig, solange x keine Nullstelle des Nennerpolynoms ist. Letztere sind ± 1. Also ist f auf dem angegebenen Definitionsbereich stetig. **[1]** Wegen $x^2 + 3x + 2 = (x + 2)(x + 1)$ ist

$$\lim_{x\to-1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x\to-1} \frac{x + 2}{x - 1} = -\frac{1}{2} \quad \textbf{[1]}$$

ist f in $x = -1$ durch $f(-1) = -1/2$ stetig fortsetzbar **[1]**. Bei $x = 1$ ist aber eine echte Polstelle.

6. **Konvergenz von Funktionenfolgen** **[7 Punkte]**

Betrachten Sie die Funktionenfolge $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f_n(x) = \sin(\frac{x}{n})$; $n \in \mathbb{N}$ und zeigen Sie

(a) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = 0$. Mit anderen Worten: $\forall x \in \mathbb{R}$ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. **[1]**

(b) Die Konvergenz ist auf $\mathbb{R}$ nicht gleichmäßig. $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|$ konvergiert also für $n \to \infty$ nicht gegen 0. **[3]**

(c) Schränken wir die f_n dagegen auf das kompakte Intervall $I = [0, 1]$ ein, ist die Konvergenz gleichmäßig. Mit anderen Worten: $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 0$. **[3]**

LÖSUNG:

(a) Wegen der Stetigkeit von sin ist $\lim_{n\to\infty} \sin(x/n) = \sin(\lim_{n\to\infty} x/n) = \sin(0) = 0$.

(b) Wir wählen $x_n = n\pi/2$ und erhalten

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \geq |f_n(x_n) - f(x_n)| = \sin(\pi/2) = 1$$

Also $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \geq 1$.

(c) sin ist auf dem Intervall $[0, 1]$ streng monoton steigend. Daher ist für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in I} |\sin(x/n)| \leq |\sin(1/n)|.$$

Also $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 0$.

7. **Taylorentwicklung** **[6 Punkte]**

Gegeben sei die Funktion $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x+1}$.

(a) Bestimmen Sie die ersten vier Ableitungen von f. **[2]**

(b) Bestimmen Sie das Taylorpolynom 4. Ordnung $T_4 f(x, 0)$ um den Entwicklungspunkt 0. **[2]**

(c) Benutzen Sie die bekannte Aussage $f(x) = T f_4(x, 0) + O(x^5)$, $x \to 0$ um zu zeigen, dass

$$\frac{\sqrt{x+1}}{x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2} - \frac{x}{8} + \frac{x^2}{16} - \frac{5x^3}{128} + O(x^4), \quad x \to 0$$

gilt. **[2]**

LÖSUNG:

(a) Die Ableitungen sind:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \quad f''(x) = \frac{-1}{4(x+1)^{3/2}} \quad f^{(3)}(x) = \frac{3}{8(x+1)^{5/2}} \quad f^{(4)}(x) = \frac{-15}{16(x+1)^{7/2}}$$

(b) Das Taylorpolynom ist

$$T_4 f(x, 0) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5\,x^4}{128}$$

(c) Es gilt $f(x) = T_4 f(x, 0) + O(x^5)$, $x \to 0$. Dies bedeutet, dass Konstanten $C, \delta > 0$ existieren, so dass

$$|f(x) - T_4 f(x, 0)| \le C|x|^5 \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x| < \delta$$

Daher:

$$\left| \frac{f(x)}{x} - \frac{T_4 f(x, 0)}{x} \right| \le C|x|^4 \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x| < \delta$$

Dies ist aber gerade die zu beweisende Aussage.

8. **Stammfunktionen** **[9 Punkte]**

Gegeben Sie für die folgenden Funktionen Stammfunktionen an:

$$\int e^x x^2 dx = \boxed{(x^2 - 2x + 2)e^x}$$ **[3]**

$$\int \frac{x\cos(x^2)}{\sin(x^2)} dx = \boxed{\frac{\ln(\sin(x^2))}{2}}$$ **[3]**

$$\int \frac{dx}{x^2 - 1} = \boxed{\frac{\ln(x-1)}{2} - \frac{\ln(x+1)}{2}}$$ **[3]**

LÖSUNG:

1. Integral. Doppelte partielle Integration:

$$\int e^x x^2 dx = e^x x^2 - 2\int e^x x dx = e^x x^2 - 2\left(e^x x - \int e^x dx\right) = (x^2 - 2x + 2)e^x$$

2. Integral. Wegen: $\frac{d}{dx}\sin(x^2) = 2x\cos(x^2)$ führt die Substitution $g(x) = \sin(x^2)$ zu:

$$\int \frac{x\cos(x^2)}{\sin(x^2)} dx = \frac{1}{2}\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \frac{1}{2}\ln(g(x)) = \frac{1}{2}\ln(\sin(x^2))$$

3. Integral. Partialbruchzerlegung ergibt:

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1} = \frac{a(x-1) + b(x+1)}{x^2-1} = \frac{(a+b)x + (b-a)}{x^2-1}$$

Also $a + b = 0$ und $b - a = 1$. Dies ergibt $a = -1/2$, $b = 1/2$. Somit

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \int \frac{dx}{2(x-1)} - \int \frac{dx}{2(x+1)} = \frac{1}{2}(\ln(x-1) - \ln(x+1)$$

9. **Integration** **[7 Punkte]**

Für welche Werte von $a, b \in \mathbb{R}$ konvergiert das Integral $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-a)^2+b^2} dx$?

Bestimmen Sie im Konvergenzfall seinen Wert.

LÖSUNG:

Der Integrand konvergiert unabhängig von $a \in \mathbb{R}$ für $b \neq 0$ wie unten gezeigt wird. Für $b = 0$ ist das verhalten bei $x = a$ von der Ordnung $\mathcal{O}(|x-a|^{-2})$, also nicht konvergent. **[2]**

Der Ausdruck ist unabhängig vom Vorzeichen von b. Für $b > 0$ erhält man

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-a)^2+b^2} dx \overset{y=x-a}{=} \frac{1}{b^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\frac{y}{b})^2+1} dy \overset{x=\frac{y}{b}}{=} \frac{1}{b} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1} dx$$

$$= \frac{1}{b} [\arctan x]_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{b}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{b}. \qquad [\mathbf{4}]$$

Für $b < 0$ dreht sich das Vorzeichen um. Insgesamt also

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-a)^2+b^2} dx = \frac{\pi}{|b|}. \qquad [\mathbf{1}]$$