....
Note

Name

Vorname

Matrikelnummer

Studiengang (Hauptfach)

Fachrichtung (Nebenfach)

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Fakultät für Mathematik

Klausur
MA9202 Mathematik für Physiker 2
(Analysis 1)

Prof. Dr. M. Keyl

9. Februar 2016, 10:30 – 12:00 Uhr

Hörsaal: .... Reihe: .... Platz: ....

Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **9** Aufgaben

Bearbeitungszeit: **90** min

Erlaubte Hilfsmittel: **ein** selbsterstelltes DIN A4 Blatt

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
$\sum$		

I ....
Erstkorrektur

II ....
Zweitkorrektur

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von .... bis ....

Vorzeitig abgegeben um ....

Besondere Bemerkungen:

1. **Vollständige Induktion** **[8 Punkte]**

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass

(a) $4^n + 5$ ist für alle $n \in \mathbb{N}_0$ durch 3 teilbar.

(b) $4^n + 15n - 1$ ist für alle $n \in \mathbb{N}_0$ durch 9 teilbar. *Hinweis:* Benutzen Sie Teil (a).

2. **Komplexe Zahlen** **[8 Punkte]**

(a) Bestimmen Sie Real– und Imaginärteil von $\sqrt{8+6i}$

$\mathrm{Re}\left(\sqrt{8+6i}\right) =$	$\mathrm{Im}\left(\sqrt{8+6i}\right) =$

(b) Geben Sie Betrag und Argument von $\left(1-\frac{\sqrt{3}}{i}\right)^{-1}$ an.

$\left\lvert\left(1-\frac{\sqrt{3}}{i}\right)^{-1}\right\rvert =$	$\arg\left(\left(1-\frac{\sqrt{3}}{i}\right)^{-1}\right) =$

3. **Konvergenz von Folgen und Reihen** **[6 Punkte]**

(a) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{n\to\infty}\big(\ln(n^4+n^2)-4\ln(n)\big)$.

☐ $=-\infty$ ☐ $=0$ ☐ $=\ln(2)$ ☐ $=\frac{1}{2}$ ☐ $=1$ ☐ $=\infty$ ☐ existiert nicht

(b) Gegen welchen Wert ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{e^n}$ eigentlich oder uneigentlich konvergent?

☐ $\frac{1}{2}$ ☐ 1 ☐ 3 ☐ 0 ☐ $\frac{3}{7}$ ☐ $\frac{4}{7}$ ☐ ∞ ☐ keiner der angegebenen Werte

(c) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n^2\pi}}{n(n+1)}$ ist

☐ konvergent ☐ absolut konvergent ☐ bestimmt divergent ☐ undefiniert

4. **Konvergenzkriterien** **[10 Punkte]**
Prüfen Sie mit dem Wurzel-, Quotienten- und Majorantenkriterium nach, ob die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k}$ konvergiert.

5. **Grenzwerte von Funktionen, stetige Fortsetzbarkeit** **[7 Punkte]**

(a) Bestimmen sie den Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(\ln x)}{\sqrt{\ln(x)}}$.

(b) Begründen Sie warum die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2+3x+2}{x^2-1}$ stetig ist und geben Sie mögliche stetige Fortsetungen in den Punkten ± 1 an.

6. **Konvergenz von Funktionenfolgen** **[7 Punkte]**
Betrachten Sie die Funktionenfolge $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f_n(x) = \sin(\frac{x}{n})$; $n \in \mathbb{N}$ und zeigen Sie

(a) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = 0$. Mit anderen Worten: $\forall x \in \mathbb{R}$ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

(b) Die Konvergenz ist auf $\mathbb{R}$ nicht gleichmäßig. $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|$ konvergiert also für $n \to \infty$ nicht gegen 0.

(c) Schränken wir die f_n dagegen auf das kompakte Intervall $I = [0, 1]$ ein, ist die Konvergenz gleichmäßig. Mit anderen Worten: $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 0$.

7. **Taylorentwicklung** **[6 Punkte]**

Gegeben sei die Funktion $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x+1}$.

(a) Bestimmen Sie die ersten vier Ableitungen von f.

(b) Bestimmen Sie das Taylorpolynom 4. Ordnung $T_4 f(x, 0)$ um den Entwicklungspunkt 0.

(c) Benutzen Sie die bekannte Aussage $f(x) = Tf_4(x, 0) + O(x^5)$, $x \to 0$ um zu zeigen, dass

$$\frac{\sqrt{x+1}}{x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2} - \frac{x}{8} + \frac{x^2}{16} - \frac{5x^3}{128} + O(x^4), \quad x \to 0$$

gilt.

8. **Stammfunktionen** **[9 Punkte]**

Gegeben Sie für die folgenden Funktionen Stammfunktionen an:

$$\int e^x x^2 dx = \boxed{}$$

$$\int \frac{x\cos(x^2)}{\sin(x^2)} dx = \boxed{}$$

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \boxed{}$$

9. **Integration** **[7 Punkte]**

Für welche Werte von $a, b \in \mathbb{R}$ konvergiert das Integral $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-a)^2+b^2}\,dx$?

Bestimmen Sie im Konvergenzfall seinen Wert.