TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Zentrum Mathematik

PROF. DR. M. KEYL
M. KECH

Mathematik für Physiker 2
(Analysis 1) MA9202

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9202_2015W

Wintersem. 2015/16
Blatt 13
(29.1.2016)

Zentralübung

Z13.1. Operatornrom

Zeigen Sie, dass der Raum $\mathbb{C}^{n\times n}$ der komplexen $n \times n$ Matrizen mit der Operatornorm

$$\|A\| = \sup_{v\neq 0} \frac{\|Av\|}{\|v\|}, \quad A \in \mathbb{C}^{n\times n}, \quad v \in \mathbb{C}^n$$

wobei $\|v\|$ für $v \in \mathbb{C}^n$ die euklidische Norm ist:

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}, \quad \langle v, w\rangle = \sum_{j=1}^{n} \overline{v_j} w_j, \quad v, w \in \mathbb{C}^n,$$

ein Banachraum (also ein vollständiger, normierter Raum) ist.

Tutoraufgaben

T13.1. Gedämpfter harmonischer Oszillator

Wir bestimmen Lösungen des gedämpften harmonischen Oszillators

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (*)$$

mit Hilfe des Matrix-Exponentials. Es ist $\omega_0 > 0$, $\beta \geq 0$.

(a) Schreiben Sie $(*)$ als ein System von DGln erster Ordnung der Form $\binom{\dot{x}}{\dot{v}} = A\binom{x}{v}$, d.h., bestimmen Sie $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte $\lambda_{1,2}$ und Eigenvektoren von A. Für welche Werte von β, ω_0 ist A diagonalisierbar?
HINWEIS: Wählen Sie die erste Komponente der Eigenvektoren gleich 1.

(c) Geben Sie für $\lambda \neq \omega_0$ das Matrixexponential e^{At} an.

(d) Für $\beta < \omega_0$ setze man $\omega = \mathrm{Im}(\lambda_1)$. Zeigen Sie nun, dass $x_1(t) = \mathrm{Re}((\mathrm{e}^{At} b^{(1)})_1)$ und $x_2(t) = \mathrm{Im}((\mathrm{e}^{At} b^{(1)})_1)$ jeweils Lösungen von $(*)$ sind.

Hausaufgaben

H13.1. Stammfunktionen von Potenzreihen

(a) Ist $P(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine relle Potenzreihe mit Konvergenzradius $R \in (0, \infty]$, dann hat $Q(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ den gleichen Konvergenzradius und für $|x| < R$ ist Q die Stammfunktion von P mit $Q(0) = 0$.

(b) *Anwendung:* Man bestimme die Potenzreihenentwicklung der Ableitung und der Stammfunktion von $\frac{1}{1-x}$.

H13.2. Matrixexponential einer antisymmetrischen Matrix

Bestimmen sie $\exp \left(\begin{smallmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{smallmatrix}\right)$

(a) durch Aufsummieren der Exponentialreihe

(b) durch Diagonalisieren

H13.3. Matrixexponential eines Jordanblocks

Sei $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie e^{Jt}.

Diese Hausaufgaben werden nicht korrigiert, können aber bei Abgabe als sinnvoll bearbeitet gewertet werden. Abgabe Mittwoch 10.2. zwischen 11.00 und 12.00 im Zentrum Mathematik, M5, Raum 03.12.037.