TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

PROF. DR. M. KEYL
M. KECH

Mathematik für Physiker 2
(Analysis 1) MA9202

Wintersem. 2015/16
Blatt 12
(20.1.2016)

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9202_2015W

Zentralübung

Nachbesprechung der Probeklausur

Tutoraufgaben

T12.1. Gleichmäßige Konvergenz

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $\mathcal{B}(D)$ der Vektorraum der beschränkten komplexwertigen Funtionen auf D. Wir definieren eine Norm auf $\mathcal{B}(D)$ durch $\|f\|_D := \sup_{x\in D} |f(x)|$.

(a) Zeigen Sie Folgendes: (f_n) konvergiert auf D gleichmässig gegen f. $\iff$ $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_D = 0$

(b) Beweisen Sie das *Cauchy-Kriterium*:
(f_n) konvergiert gleichmässig auf D. $\iff$ $\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall m, n > N : \|f_m - f_n\|_D < \varepsilon$

(c) Sei $\delta \in (0, \pi)$. Zeigen Sie, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx)/n$ auf $[\delta, 2\pi - \delta]$ gleichmässig konvergiert.
Hinweis: Setzen Sie $s_n(x) := \sum_{k=1}^{n} \sin(kx) = \operatorname{Im} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{ikx}$ und benutzen Sie $|s_n(x)| \leq 1/\sin(x/2) \leq 1/\sin(\delta/2)$ und eine Teleskopsumme, um $\sum_{k=n}^{m} \sin(kx)/k = \sum_{k=n}^{m} (s_k(x) - s_{k-1}(x))/k$ uniform in x nach oben abzuschätzen.

T12.2. Taylorentwicklung

Geben Sie die Taylorreihe von (a) exp, (b) sin und (c) cos jeweils im Entwicklungspunkt $x_0 \in \mathbb{R}$ an und zeigen Sie, dass diese Taylorreihen auf ganz $\mathbb{R}$ jeweils gegen die ursprüngliche Funktion konvergieren.
HINWEIS: Additionstheoreme

T12.3. Taylorreihen

a) Man bestimme die Taylorreihe der stetigen Fortsetzung von $\frac{\sin x}{x}$ um $x = 0$ und zeige, dass sie auf ganz $\mathbb{R}$ gegen die Funktion selbst konvergiert.

b) Wie lautet die Taylorreihe der Funktion $\operatorname{Si}(x) := \int\limits_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ im Entwicklungspunkt 0?

c) Wieviele Terme der Taylorreihe von $\operatorname{Si}(x)$ muss man berücksichtigen, wenn der absolute Fehler für $|x| \leq 1$ kleiner als 0.002 sein soll?

Hausaufgaben

H12.1. Vertauschung von Grenzprozessen

Sei (f_n) eine reellwertige Funktionenfolge auf $D \subseteq \mathbb{R}$ und ξ ein Häufungspunkt von D. Zeigen Sie, dass falls der gleichmässige Limes von (f_n) und die Grenzwerte $\lim_{x\to\xi} f_n(x)$ für alle n existieren,

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to\xi} f_n(x) = \lim_{x\to\xi} \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

H12.2. Taylorpolynome

a) Bestimmen Sie ein Taylorpolynom für die Funktion $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \frac{1-x}{1+x}$, das von der Funktion auf dem Intervall $[0, \frac{1}{4}]$ höchstens um ein Prozent abweicht.

b) Bestimmen Sie die ersten drei von Null verschiedenen Terme der Taylorentwicklung der relativistischen Energie $E(v) = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ eines Teilchens der Ruhemasse m_0, das sich mit der Geschwindigkeit v bewegt (und interpretieren Sie sie).

H12.3. Taylorentwicklung der Potenzfunktion

Geben Sie die Taylorreihe von $x \mapsto x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, im Entwicklungspunkt $x_0 > 0$ an und zeigen Sie, dass sie im Konvergenzbereich gegen die ursprüngliche Funktion konvergiert.
Hinweis: Binomialreihe

Hausaufgabenabgabe: Mittwoch, 3.2.16, zu Beginn der Vorlesung