Zentralübung

Z11.1. Partialbruchzerlegung

Wie lauten die reellen Partialbruchzerlegungen der folgenden rationalen Funktionen:

(a) $\frac{x^4+x^2}{x^4-1}$ (b) $\frac{x^2+x+1}{x^2+1}$ (c) $\frac{8x}{(x^2-1)(x-1)^2}$ (d) $\frac{1}{(x^8-1)(x^2+1)}$

Z11.2. Gamma-Funktion

Die Eulersche Gammafunktion ist definiert durch

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}\, \mathrm{d}t.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\Gamma(x)$ genau dann konvergiert, wenn $x > 0$.
Hinweis: Zerlegen Sie den Integrationsbereich in die zwei Teile $t \in [0,1]$ und $t \in [1,\infty)$, und diskutieren Sie im zweiten Fall zusätzlich $x \leq 1$ und $x > 1$ getrennt.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x) \quad \text{für alle } x > 0 \quad \text{und} \quad \Gamma(n+1) = n! \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Hinweis: Integrieren Sie partiell.

Tutoraufgaben

T11.1. Uneigentliches Integral und Landau-Symbole

Sei $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ stetig und $s \in \mathbb{R}$.

(a) Ist $f(x) = \mathcal{O}\left(x^s\right)$, $x \to \infty$, mit $s > -1$, so gilt für jede Stammfunktion F von f, dass $F(x) = \mathcal{O}\left(x^{s+1}\right)$. Ist $s = -1$ so gilt nur $F(x) = \mathcal{O}\left(\ln x\right)$.

(b) Ist $f(x) = \mathcal{O}\left(x^s\right)$, $x \to \infty$, mit $s < -1$, so ist f auf $[1,\infty)$ absolut integrierbar und $\int\limits_x^\infty f(t)\mathrm{d}t = \mathcal{O}\left(x^{s+1}\right)$, $x \to \infty$.

(c) Ist $f(x) = \mathcal{O}\left(x^s\right)$, $x \downarrow 0$, mit $s < -1$, so gilt für jede Stammfunktion F von f, dass $F(x) = \mathcal{O}\left(x^{s+1}\right)$. Ist $s = -1$ so gilt nur $F(x) = \mathcal{O}\left(-\ln x\right)$, $x \downarrow 0$.

(d) Ist $f(x) = \mathcal{O}\left(x^s\right)$, $x \to \infty$, mit $s > -1$, so ist f auf $(0,1]$ absolut integrierbar und $\int\limits_0^x f(t)\mathrm{d}t = \mathcal{O}\left(x^{s+1}\right)$, $x \to \infty$.

T11.2. Uneigentliche Integrale

Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls deren Wert.

(a) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)}$, (b) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\cosh x - 1}}$.

T11.3. Stammfunktionen von Potenzreihen

Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklung von

(a) $x \mapsto \operatorname{erf}(x)$ mit $\operatorname{erf}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^x \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2} \mathrm{d}t$, (b) $x \mapsto \arctan(x)$

im Entwicklungspunkt 0 und ihren Konvergenzradius.

Hausaufgaben

H11.1. Partialbruchzerlegung

Bestimmen Sie Stammfunktionen von (a) $\binom{x}{4}^{-1}$ und (b) $\frac{1}{1+x+x^2+x^3}$ ohne Computerhilfe.

H11.2. Stirlingsche Formel

Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$,

$$n \log(n) - n + 1 \leq \log n! \leq (n+1) \log(n) - n + 1 \qquad \textit{(Stirlingsche Formel).}$$

H11.3. Uneigentliche Integrale

Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls deren Wert.

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \ln |x| \mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int_{0}^{1} (\ln x)^2 \mathrm{d}x$ (c) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(\cos(x) + x)}$

Hausaufgabenabgabe: Mittwoch, 27.1.16, zu Beginn der Vorlesung