Zentralübung

Z10.1. Konvexität

Eine Funktion $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ heißt konvex, wenn $\forall x,y\in(a,b)$, $\forall\in[0,1]$ gilt:

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y).$$

Gilt sogar

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)<\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

heißt f strikt konvex.

Sei $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Man zeige:
f ist genau dann konvex, wenn $f''\geq 0$. Gilt $f''>0$, so ist f sogar strikt konvex.

Z10.2. Stammfunktionen

Bestimmen Sie jeweils Stammfunktionen von
(a) $x\mapsto\frac{1}{\cos^2 x}$, (b) tan, (c) $x\mapsto\frac{1}{1+x^2}$, (d) arctan, (e) $x\mapsto\sin^2 x$.

Tutoraufgaben

T10.1. Integration

Bestimmen Sie explizit folgende Stammfunktionen:

(a) $\displaystyle\int x^n\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$, $n\in\mathbb{N}_0$, (b) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin(2x)}$, Substitution: $g(x)=\tan x$

T10.2. Differentialgleichung erster Ordnung

Sei $f:(a,b)\to\mathbb{R}^+$ stetig. Für ein Intervall I heißt $x:I\to(a,b)$ Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{x}=f(x),$$

falls $\dot{x}(t)=f(x(t))$ für alle $t\in I$. Sei $F:(a,b)\to\mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $\frac{1}{f}$.

(a) Dann ist F injektiv und die auf dem maximalem Definitionsbereich definierte Umkehrabbildung F^{-1} ist eine Lösung der Differentialgleichung.
(b) Jede Lösung $x:I\to\mathbb{R}$ ist von der Form $x(t)=F^{-1}(t-t_0)$ für ein $t_0\in\mathbb{R}$.

T10.3. Lineare Differentialgleichung erster Ordnung

Die auf ganz $\mathbb{R}$ definierten Lösungen von $\dot{x}=a\,x$ mit $a\in\mathbb{R}$ bilden einen eindimensionalen Untervektorraum von $\mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Für $a=1$ ist exp die einzige Lösung mit $x(0)=1$.

Hausaufgaben

H10.1. Nulltest

Es sei $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $f(x)\geq 0$ für alle $x\in[a,b]$. Zeigen Sie: Wenn

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,\text{x}=0$$

für alle integrierbaren Funktionen $g\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ gilt, dann ist f die Nullfunktion.

H10.2. Stammfunktionen

Bestimmen Sie Stammfunktionen von

(a) $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, (b) $x \mapsto x^2 \sin x$, (c) $x \mapsto \sin x \cos x$, (d) $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$,

wobei (c) und (d) jeweils sowohl mit partieller Integration, als auch mit Substitution gelöst werden sollen. HINWEIS: in (d) substituiere man x durch $g(t) = \sin t$.

H10.3. Differentialgleichung erster Ordnung

Finden Sie die Lösungen der Differentialgleichung $\dot{x} = x^\alpha$, $x > 0$, $\alpha \in \{-1, \frac{1}{2}, 1, 2\}$, und skizzieren Sie die Lösungstrajektorien.

Hausaufgabenabgabe: Mittwoch, 20.1.16, zu Beginn der Vorlesung