Zentralübung

Z9.1. Gleichmäßige Steitgkeit

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass f auch gleichmäßig stetig ist.

Z9.2. Gleichmäßig konvergente Funktionenreihen

Sei $f_n(x) = \sum\limits_{k=-n}^{n} \frac{1}{x-k}$. Man zeige: $f : \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, ist stetig.

Z9.3. Ableitungen

Berechnen Sie jeweils die erste Ableitung der folgenden Funktionen ($\alpha \in \mathbb{R}$)

(a) sin, (b) arcsin, (c) $x \mapsto x^\alpha$, $x > 0$, (d) $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$, $|x|<1$.

Tutoraufgaben

T9.1. Gleichmäßige Konvergenz

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $g_n(x) := \dfrac{nx}{1 + |nx|}$.

(a) Zeigen Sie: Jede der Funktionen g_n ist stetig auf $\mathbb{R}$.

(b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $g(x) := \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)$ definiert bzw. stetig?

(c) Konvergiert $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen g?

T9.2. Gleichmäßig konvergente Funktionenreihen

Sei $f_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\cos(kx)}{k^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Man zeige: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, ist stetig.

T9.3. Ableiten

(a) Berechnen sie elementar die Ableitung des Kosinus.

(b) Berechnen Sie die Ableitung des Arcuskosinus im Intervall $(-1, 1)$.

(c) Berechnen Sie die Ableitung des Tangens und Arcustangens.

(d) $f : [-1, \infty) \to [-\frac{1}{e}, \infty)$, $f(x) = xe^x$, ist bijektiv. Die zugehörige Umkehrfunktion $W : [-\frac{1}{e}, \infty) \to [-1, \infty)$ wird als Lambertsche W-Funktion bezeichnet. Berechnen Sie die Ableitung von W an den Punkten 0 und e.

T9.4. Taylorpolynom einer Umkehrfunktion

Geben Sie für die Umkehrfunktion von $f(x) = x + x^3$ das Taylorpolynom der Ordnung 3 im Punkt 2 an.

T9.5. Grenzwerte

Bestimmen Sie, falls möglich, die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim_{x\to\infty} x^{1/x}$, (b) $\lim_{x\to 1} \frac{x^\alpha - 1}{x-1}$, (c) $\lim_{x\downarrow 0} x^{\sin x}$, (d) $\lim_{x\uparrow \frac{\pi}{2}} x^{1/\cos x}$.

Hausaufgaben

H9.1. Ableitungsregeln

Berechnen Sie jeweils die erste Ableitung der folgenden Funktionen:

(a) sinh, cosh, tanh. HINWEIS: $\sinh(x)=\frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh(x)=\frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1$.

(b) arsinh, arcosh:$(1,\infty) \to \mathbb{R}^+$, artanh:$(-1,1) \to \mathbb{R}$, die zugehörigen Umkehrfunktionen.

(c) $x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2+1})$, $(1,\infty) \ni x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2-1})$, $(-1,1) \ni x \mapsto \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$,

Skizzieren Sie die Funktionen in (b) und ihre Ableitungen. Zeigen Sie, dass die Funktionen in (c) die selben sind wie die hyperbolischen Umkehrfunktionen in (b).

H9.2. Taylorpolynom von x^x

Geben Sie das Taylorpolynom der Ordnung 4 von $f(x) = x^x$ im Punkt $x_0 = 1$ an.

H9.3. Differenzierbare Funktionen

Sei

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar, aber nicht stetig differenzierbar ist.

H9.4. Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Die Autobahnpolizei misst die Zeit die ein Auto zwischen zwei Lichtschranken im Abstand von hundert Metern verbringt. Trotz vorgegebener Höchstgeschwindigkeit von 100km/h wurden bei einem Auto 3s gemessen. Begründen Sie den Strafzettel mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung. Welche Geschwindigkeit können Sie dem Fahrer nachweisen?

H9.5. Reflexionsgesetz

Ein Lichtstrahl läuft geradlinig vom Punkt $P_1 = (0,b) \in \mathbb{R}^2$, $b > 0$, zum Punkt $P = (x,0)$, $x \in \mathbb{R}$, und von dort geradlinig zum Punkt $P_2 = (a,c)$, $a, c > 0$.

(a) Bestimmen Sie die Länge L der vom Lichtstrahl durchlaufene Strecke als Funktion von x.

(b) Zeigen Sie, dass der durch "Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel" bestimmte Wert x_0 ein möglicher Kandidat für eine Extremstelle von L ist.
Hinweis: Man verwende die Beziehung $a - x_0 = \frac{c}{b} x_0$ an geeigneter Stelle.

(c) Zeigen Sie, dass sich bei x_0 das einzige absolute Minimum von $L(x)$ befindet.
Hinweis: Zweite Ableitung.

H9.6. Langevin-Funktion

Die Langevin-Funktion

$$L(x) := \begin{cases} \coth(x) - \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

gibt in geeigneten Einheiten die Magnetisierung eines Paramagneten im äußeren Magnetfeld x an.

(a) Man zeige, dass L stetig und streng monoton wachsend ist.
Hinweis: L'Hospital und $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

(b) Man zeige $L(x) = \frac{1}{3}x + o(x)$ für $x \to 0$, und damit $L'(0) = \frac{1}{3}$.
Hinweis: $\cosh x = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$, $\sinh x = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$.

(c) Man bestimme die Grenzwerte $x \to \pm\infty$ und skizziere die Langevin-Funktion.

Hausaufgabenabgabe: Mittwoch, 13.1.16, zu Beginn der Vorlesung

Frohe Weihnachten und guten Rutsch ins neue Jahr!