TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

PROF. DR. M. KEYL
M. KECH

Mathematik für Physiker 2
(Analysis 1) MA9202

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9202_2015W

Wintersem. 2015/16
Blatt 8
(3.12.2015)

Zentralübung

Z8.1. Grenzwerte und Stetigkeit

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}$ und $x_0 \in D^{\mathrm{HP}}$. Man zeige:
f ist genau dann stetig in x_0, wenn $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Z8.2. Stetigkeit der Umkehrfunktion

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend.

(a) $f : [a, b] \to [c, d]$ mit $c := f(a)$ und $d := f(b)$ ist bijektiv.

(b) Die Umkehrfunktion $f^{-1} : [c, d] \to [a, b]$ ist streng monoton wachsend und stetig.

Z8.3. Landau-Symbole

Seien $\alpha, \beta > 0$. Zeigen Sie:

(a) $x^\alpha = o(\mathrm{e}^{\beta x})$, $x \to \infty$,

(b) $\ln x = o(x^\alpha)$, $x \to \infty$,

(c) $\ln x = o(\frac{1}{x^\alpha})$, $x \searrow 0$,

(d) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \mathcal{O}(\delta^{-\frac{1}{2}})$, $x \nearrow 1$ mit $\delta = |x - 1|$.

(e) $\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \mathcal{O}(x^{n+1})$ für $x \to 0$.

(f) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$.

Tutoraufgaben

T8.1. Stetigkeit

Beweisen Sie mit dem ϵ-δ-Kriterium (durch Konstruktion von δ in Abhängigkeit von x und ϵ) die Stetigkeit der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$.

T8.2. Stetige Fortsetzungen

Begründen Sie, warum die folgenden Funktionen stetig sind und geben Sie mögliche stetige Fortsetzungen an.

(a) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$.

(b) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin \frac{1}{x}$.

(c) $f : \mathbb{C} \setminus N \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{z^n - 1}{z^m - 1}$, $n, m \in \mathbb{N}$, mit $N = \{z \in \mathbb{C} \mid z^m - 1 = 0\}$ bei $z = 1$.

T8.3. Landau-Symbole

Man zeige, jeweils für $x \to 0$,

(a) $\ln(1 + x) = o(1)$,

(b) $\ln(1 + x) = \mathcal{O}(x)$,

(c) $\ln(1 + x) = x + o(x)$.

Hausaufgaben

H8.1. Stetigkeit

Wo sind die folgenden Funktionen stetig (mit Beweis)?

(a) $D(f) = \mathbb{R}$ und $f(x) = [x]$ mit $[x] := \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$

(b) $D(f) = \mathbb{R}$ und $f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ -\sin x, & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

Hinweis: Benutzen Sie, dass $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dicht sind in $\mathbb{R}$ und dass $\sin x$ stetig ist auf ganz $\mathbb{R}$.

(c) $D(f) = \mathbb{R}$ und $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}}, & \text{falls } x \in (-1, 1) \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1) \end{cases}$

H8.2. Monotone Funktionen und Stetigkeit

Eine monoton steigende Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ besitzt in jedem Punkt ihres Definitionsbereichs rechts- und linksseitige Grenzwerte.

H8.3. Unstetigkeit der Umkehrfunktion

(a) Sei $D \subset \mathbb{R}$ beliebig, $f : D \to [a, b]$ bijektiv, streng monoton steigend und stetig. Geben Sie ein Beispiel dafür an, dass die Umkehrfunktion von f nicht stetig sein muss.

Hausaufgabenabgabe: Mittwoch, 16.12.2015, zu Beginn der Vorlesung