TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

PROF. DR. M. KEYL
M. KECH

Mathematik für Physiker 2
(Analysis 1) MA9202

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9202_2015W

Wintersem. 2015/16
Blatt 7
(26.11.2015)

Zentralübung

Z7.1. Konvergenzradius

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} z^n$,

(b) $z + z^2 + z^4 + z^8 + \cdots$.

Z7.2. Die verallgemeinerten Binomialkoeffizienten

Wir definieren den Binomialkoeffizienten $\binom{z}{k}$ für beliebiges $z \in \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{Z}$ als Polynom vom Grad k:

$$\binom{z}{k} = \begin{cases} \prod\limits_{j=1}^{k} \frac{z-j+1}{j} = \frac{z(z-1)\cdots(z-k+1)}{k!} & \text{für } k > 0, \\ 0 & \text{für } k < 0. \end{cases}$$

Man benutze den *Identitätssatz für Polynome*: Stimmen zwei Polynome p und q vom Grad $\leq n$ in $n+1$ Punkten überein, so gilt $p(z) = q(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

(a) $\binom{z}{k} = \binom{z-1}{k-1} + \binom{z-1}{k}$ für $k \in \mathbb{Z}$.

(b) $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{w}{k}\binom{z}{n-k} = \binom{w+z}{n}$ für $w, z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0$.
Hinweis: Man zeige dies zunächst für $w, z \in \mathbb{N}_0$ und wende den Identitätssatz an.

(c) Der Konvergenzradius von $f_\alpha(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$ ist 1, falls $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}_0$.

Z7.3. Eigenschaften der reellen Exponentialfunktion

Für $z \in \mathbb{C}$ ist $\exp(z) \overset{\text{def}}{=} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{z}{n})^n$ und es gilt für $w, z \in \mathbb{C}$ die Funktionalgleichung $\exp(w+z) = \exp(w)\exp(z)$. Wir zeigen, dass die Einschränkung $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ bijektiv ist.

(a) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $\exp(x) \geq 1 + x$.

(b) $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ ist streng monoton wachsend und damit injektiv.

(c) Aus $x_n \to x$ folgt $\exp(x_n) \to \exp(x)$.

(d) $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ ist surjektiv.

Tutoraufgaben

T7.1. Konvergenzradius

Die Konvergenzradien der beiden Potenzreihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ seien $r_a, r_b \in \mathbb{R}^+$.
Zeigen Sie:

(a) Für beliebige nichtnegative beschränkte Folgen $(x_n), (y_n)$ gilt:

$$\limsup_{n\to\infty} x_n y_n \le \limsup_{n\to\infty} x_n \limsup_{n\to\infty} y_n.$$

(b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$ hat einen Konvergenzradius $r \ge r_a r_b$.

(c) Das Cauchyprodukt der beiden Potenzreihen hat einen Konvergenzradius $r \ge \min\{r_a, r_b\}$.

T7.2. Die verallgemeinerten Binomialkoeffizienten

Sei $f_\alpha(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$.

(a) Für $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$ gilt $f_\alpha(z) f_\beta(z) = f_{\alpha+\beta}(z)$.

(b) Für $n \in \mathbb{Z}$, $|z| < 1$ gilt $(1+z)^n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} z^k$.

T7.3. Eigenschaften der reellen Logarithmusfunktion

Die Umkehrfunktion von $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ heißt $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. Man zeige:

(a) Für $x, y > 0$ ist $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$, $\ln(1) = 0$, $\ln(\mathrm{e}) = 1$.

(b) ln ist streng monoton wachsend.

(c) $\ln(x) \le x - 1$ für $x > 0$,

Hausaufgaben

H7.1. Konvergenzradius

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen, wobei $a \in \mathbb{R}$:

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a^{n^2} z^n$,

(b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a^n z^{n^2}$,

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n a}{n}\right)^{n^2} z^n$,

(d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\prod\limits_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{a}{k}\right)^k \right) z^n$.

H7.2. Identitätssatz für Potenzreihen

Es sei $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k\, z^k$ eine Potenzreihe mit komplexen Koeffizienten und Konvergenzradius $R >$ 0.

(a) Zeigen Sie: Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ und jedem $r \in \mathbb{R}$ mit $0 < r < R$ gibt es eine Konstante $K \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass $\left| \sum\limits_{k=n}^{\infty} c_k z^k \right| \le K\, |z^n|$ für alle $|z| \le r$.

(b) Folgern Sie daraus den *Identitätssatz für Potenzreihen:* Wenn es eine gegen 0 konvergierende, komplexe Folge $(z_m)_{m\in\mathbb{N}}$ gibt mit der Eigenschaft, dass

$$0 < |z_m| < R \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} c_k\, z_m^k = 0 \qquad \text{für jedes } m \in \mathbb{N},$$

dann ist $c_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

H7.3. Hauptwert des Logarithmus

Bestimmen Sie

(a) $\log \mathrm{i}$, $\log(1+\mathrm{i})$, $\log\big((1+\mathrm{i})^k\big)$ für $k \in \{2, \ldots, 8\}$,

(b) π^{e}, i^{π}, π^{i}, i^{i} in Polardarstellung,

(c) $\{z^z \,:\, |z| = 1\}$ als Punktmenge in der komplexen Ebene.

Hausaufgabenabgabe: Mittwoch, 09.12.2015, zu Beginn der Vorlesung