TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

Prof. Dr. M. Keyl
M. Kech

Mathematik für Physiker 2 (Analysis 1) MA9202

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9202_2015W

Wintersem. 2015/16
Blatt 6
(19.11.2015)

Zentralübung

Z6.1. p-adische Brüche

Sei $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$. Zur Folge $(d_i)_{i\in\{-N,-N+1,\dots\}}$ mit $d_i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ heißt

$$(d_{-N} \cdots d_{-1} d_0.d_1 d_2 \cdots)_p := \sum_{i=-N}^{\infty} \frac{d_i}{p^i} = c \in \mathbb{R}$$

die p-adische Form von c. Periodizität hinter dem "Dezimalpunkt" wird durch einen Überstrich angezeigt, d.h,

$$(d_{-N} \cdots d_0.d_1 \cdots d_k \overline{d_{k+1} \cdots d_n})_p = (d_{-N} \cdots d_0.d_1 \cdots d_k d_{k+1} \cdots d_n d_{k+1} \cdots d_n \cdots)_p,$$

Periode Null muss nicht notiert werden, $(d_{-N} \cdots d_0.d_1 \cdots d_k)_p := (d_{-N} \cdots d_0.d_1 \cdots d_k\overline{0})_p$.
Zeigen Sie, dass $(0.\overline{d_1 \cdots d_k})_p$ eine rationale Zahl ist.

Z6.2. Konvergenzkriterien

Diskutieren Sie (absolute) Konvergenz der folgenden Reihen

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$, (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{n})^{n^2}$, (e) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n-5}{n^2+20n+10}$.

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$, (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{n})^{n-1}$,

Z6.3. Konvergenz der Riemannschen Zeta-Funktion

Man zeige: Die Riemannsche Zeta-Funktion

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

ist für $s \in \mathbb{R}$, $s > 1$, absolut konvergent.
Hinweis: Man spalte die Summe jeweils vor $n = 2, 4, 8, 16, \dots$ auf.

Z6.4. Umordnung der alternierenden harmonischen Reihe

Zeigen Sie: es gibt eine Umordnung der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, die gegen 42 konvergiert.

Tutoraufgaben

T6.1. Wurzelkriterium

(a) $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut.

(b) $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist divergent.

(c) Man gebe je ein Beispiel für eine absolut konvergente, eine konvergente, aber nicht absolut konvergente und eine divergente Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ an mit $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$.

T6.2. Konvergenz

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf (absolute) Konvergenz.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n-1}}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^{n-1}}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

T6.3. Schwarzsche Ungleichung

(a) Seien $\{a_k, b_k \mid k = 1, ..., n\}$ komplexe Zahlen. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2\right)^{1/2}.$$

(b) Seien (a_n) und (b_n) absolut quadratsummierbare, komplexwertige Folgen. Zeigen Sie, dass dann die Produktfolge $(a_n b_n)$ absolut summierbar ist und dass die *Schwarzsche Ungleichung* gilt,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2\right)^{1/2}.$$

Hinweis: Eine komplexe Folge (a_n) heißt absolut quadratsummierbar, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$ konvergiert.

Hausaufgaben

H6.1. Konvergenz von Reihen

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf (absolute) Konvergenz.

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2-3}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}2^n}{n^2}$ (d $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^4 \,\mathrm{e}^{-n^2}$

H6.2. p-adische Brüche

Man schreibe

(a) $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{11}$ als Dezimalbruch,

(b) 0.0625, $0.\overline{13}$, $0.1\overline{9}$ als gekürzte Brüche,

(c) $\frac{1}{7}$ im Dual-, Ternär-, Septal-, Oktal- und Dezimalsystem ($p = 2, 3, 7, 8, 10$).

H6.3. Minkowski Ungleichung

(a) Seien $\{a_k, b_k \,|\, k = 1, ..., n\}$ komplexe Zahlen. Zeigen Sie, dass

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2\right)^{1/2}.$$

Hinweis: Benutzen Sie die Schwarzsche Ungleichung aus Aufgabe T6.3.

(b) Seien (a_n) und (b_n) absolut quadratsummierbare, komplexwertige Folgen. Zeigen Sie, dass dann auch die Folge $(a_n + b_n)$ absolut quadratsummierbar ist und dass die *Minkowskische Ungleichung* gilt,

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n + b_n|^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2\right)^{1/2}.$$

Hausaufgabenabgabe: Mittwoch, 02.12.2015, zu Beginn der Vorlesung