TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Zentrum Mathematik

PROF. DR. M. KEYL
M. KECH

Mathematik für Physiker 2 (Analysis 1) MA9202

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9202_2015W

Wintersem. 2015/16
Blatt 5
(12.11.2015)

Zentralübung

Z5.1. lim sup, lim inf

Sei (a_n) eine beschränkte, reelle Folge. Zeigen Sie

- Für jeden Häufungspunkt a von (a_n) gilt:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq a \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$$

- (a_n) ist genau dann konvergent, wenn

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n$$

gilt.

Z5.2. Häufungspunkte von Folgen

Seien (a_n), (b_n) zwei reelle Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. Dann hat die Folge $(a_n + b_n)$ die gleichen Häufungspunkte wie (a_n).

Z5.3. Konvergenzgeschwindigkeit

Wieviele Summanden müssen addiert werden, damit die folgenden konvergenten Folgen ihren Grenzwert bis auf einen Fehler von 10^{-10} approximieren:

(a) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{10^k}$, (b) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

Z5.4. Die erweiterte Zahlengerade $\overline{\mathbb{R}}$

Durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+|x|}, & \text{falls } x \in \mathbb{R}, \\ 1, & \text{falls } x = \infty, \\ -1, & \text{falls } x = -\infty, \end{cases}$$

wird eine Funktion $f : \overline{\mathbb{R}} \to [-1, 1]$ auf $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ definiert. Zeigen Sie:

(a) $d(x, y) := |f(x) - f(y)|$ definiert eine Metrik auf $\overline{\mathbb{R}}$.

(b) (a_n) konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}$, genau dann wenn $\lim\limits_{n\to\infty} d(a_n, a) = 0$.
Hinweis: Aus $a_n \to a$ folgt $|a_n| \to |a|$.

(c) (a_n) konvergiert uneigentlich gegen ∞, genau dann wenn $\lim\limits_{n\to\infty} d(a_n, \infty) = 0$.

Tutoraufgaben

T5.1. $\limsup$, $\liminf$

Überprüfen Sie, ob die untenstehenden Aussagen äquivalent ($\Longleftrightarrow$) zur Konvergenz der Folge (a_n) sind oder ob die Implikationen nur in einer Richtung gültig sind ($\Longrightarrow$).

(a) $\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall k, n \geq N \colon \ |a_n - a_k| < \varepsilon$

(b) $\forall \varepsilon \geq 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall k, n \geq N \colon \ |a_n - a_k| \leq \varepsilon$

(c) $\forall N \in \mathbb{N} \, \exists \varepsilon > 0 \, \forall k, n \geq N \colon \ |a_n - a_k| < \varepsilon$

(d) $\exists N \in \mathbb{N} \, \forall \varepsilon > 0 \, \forall n \geq N \colon \ |a_n - a| < \varepsilon$

T5.2. Gegenbeispiele bei uneigentlicher Konvergenz

Seien (a_n), (b_n), (c_n) (evtl. uneigentlich) konvergente Folgen mit Grenzwerten in $\overline{\mathbb{R}}$. Geben Sie jeweils Beispiele für diese Folgen an, so dass $(a_n b_n)$, (a_n / c_n), bzw., $(a_n + b_n)$ (uneigentlich) gegen $C \in \overline{\mathbb{R}}$ konvergieren, bzw., divergent sind.

T5.3. Häufungspunkte

Bestimmen Sie für der Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$c_n = \left(1 - \frac{(-1)^n}{n}\right) \sin(n \tfrac{\pi}{2}),$$

$\overline{c_n}$, $\underline{c_n}$, $\limsup\limits_{n \to \infty} c_n$, $\liminf\limits_{n \to \infty} c_n$, alle Häufungspunkte und jeweils Teilfolgen, die gegen diese konvergieren.

T5.4. Konvergenzgeschwindigkeit

Sei (a_n) die durch $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{x}{a_n})$ rekursiv definierte Folge mit $a_0 > 0$, $x > 0$. Es ist bekannt, dass $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $r_n := a_n - \sqrt{x}$, eine positive Nullfolge ist.

(a) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $r_{n+1} \leq \frac{r_n^2}{2\sqrt{x}}$.

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $r_{n+1} \leq 2\sqrt{x} \left(\frac{r_1}{2\sqrt{x}}\right)^{2^n}$.

(c) Sei $x = 2$, $a_0 = 2$. Schätzen Sie, wieviele Schritte man braucht um $\sqrt{2}$ auf 1000 Stellen genau zu bestimmen.

Hausaufgaben

H5.1. Konvergenz

Man zeige $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Hinweis: Man zeige zunächst $\sqrt[n]{n} \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}$ durch Anwendung der binomischen Formel.

H5.2. Häufungspunkte

Sei (a_n) eine reelle Folge mit Häufungspunkten $\frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$.

(a) Ist 0 ein Häufungspunkt von (a_n)?

(b) Geben Sie ein Beispiel für eine solche Folge an.

H5.3. Konvergenz einer Mischfolge

Es seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reelle Folgen. Weiter sei eine *Mischfolge* $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiert durch:

$$c_{2n+1} := a_n \text{ und } c_{2n} := b_n.$$

Zeigen Sie: Die Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert genau dann, wenn $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergieren und denselben Grenzwert haben.

H5.4. $\limsup$, $\liminf$

Geben Sie für jede der folgenden Aussagen einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an:

a) Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, so hat die Folge $(a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die gleichen Häufungspunkte wie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkte reelle Folgen, so gilt:

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

c) Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkte reelle Folgen, so gilt:

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n) \geq \limsup_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n.$$

Hausaufgabenabgabe: Mittwoch, 25.11.2015, zu Beginn der Vorlesung