TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

Prof. Dr. M. Keyl
M. Kech

Mathematik für Physiker 2
(Analysis 1) MA9202

Wintersem. 2015/16
Blatt 4
(05.10.2015)

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9202_2015W

Zentralübung

Z4.1. Rechenregeln

Für zwei relle Folgen (a_n), (b_n) zeigen Sie:

(a) Ist (b_n) eine Nullfolge, $a \in \mathbb{R}$ und gelte $|a_n - a| \leq b_n$ f.f.a. $n \in \mathbb{N}$, dann konvergiert (a_n) gegen a (Majorantenkriterium).

(b) Seien (a_n), (b_n) konvergent gegen a, b, dann konvergiert die Folge $(a_n b_n)$ gegen ab.

(c) Die Menge aller konvergenten reellen Folgen und die Menge aller reellen Nullfolgen sind jeweils Untervektorräume von $\mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

Z4.2. Charakterisierung des Supremums

Sei $M \subset \mathbb{R}$, $m := \sup M \in \mathbb{R}$. Dann gibt es eine gegen m konvergente Folge (x_n) in M.

Z4.3. Existenz der k-ten Wurzeln

Für $y \in \mathbb{R}^+$, $k \in \mathbb{N}$, besitzt die Gleichung $x^k = y$ genau eine positive Lösung, die mit $y^{\frac{1}{k}}$ oder $\sqrt[k]{y}$ bezeichnet wird.
Hinweis: Für die Existenz betrachte man das Supremum der Menge $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x^k < y\}$.

Z4.4. Die Fibonacci-Zahlen und der Goldene Schnitt

Seien $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, $n \in \mathbb{N}$, die Fibonacci-Zahlen und $q_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

(a) Wie lautet die Rekursionsformel für die q_n?

(b) Bestimmen Sie anhand des Graphen von $x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$ und der Winkelhalbierenden die q_n zeichnerisch.

(c) Zeigen Sie, dass (q_n) gegen den Goldenen Schnitt $q := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ konvergiert.

Tutoraufgaben

T4.1. Monotonie des Limes

Seien (a_n), (b_n) zwei konvergente reelle Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$.

(a) Aus $a_n \leq b_n$ f.f.a. $n \in \mathbb{N}$ folgt $a \leq b$.

(b) Aus $a_n = b_n$ f.f.a. $n \in \mathbb{N}$ folgt $a = b$.

(c) Aus $a_n < b_n$ f.f.a. $n \in \mathbb{N}$ folgt nicht $a < b$.

T4.2. Grenzwert

Untersuchen Sie, ob die durch

$$a_n := \frac{7n^7 \left(1 + \frac{1}{n!}\right) \left(n^3 - n^2\right)}{\left(n^3 + 2\right) \left(2n^5 + 1\right) (n+1)^2},$$

definierte Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert, und geben Sie ggf. ihren Grenzwert an.

T4.3. Logistische Abbildung

Die *logistische Abbildung* ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := r\,x\,(1-x)$ mit einem Parameter $0 \le r \le 4$. Zu einem Startwert a_0 mit $0 < a_0 < 1$ definiert man die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv durch $a_{n+1} := f(a_n)$. Zeigen Sie:

(a) Für $0 \le r \le 1$ ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

(b) Für $1 < r \le 2$ konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\frac{r-1}{r}$.

T4.4. Die dritte Wurzel

Sei $y \in \mathbb{R}$, $y > 1$, $f(x) = \frac{1}{3}(2x + \frac{y}{x^2})$ und (x_n) die rekursiv definierte Folge mit $x_1 := y$, $x_{n+1} := f(x_n)$.

(a) Skizzieren Sie, z.B. für $y = 2$, den Graphen von $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$. Begründen Sie mit Schulwissen warum $y^{1/3} \le f(x) \le x$ für $x \ge y^{1/3}$ gilt.

(b) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nach unten beschränkt durch $y^{1/3}$ und monoton fallend.

(c) (x_n) konvergiert gegen $y^{1/3}$.

(d) Wie muss man f wählen, um auf die gleiche Weise die k-te Wurzel von y zu erhalten?

Hausaufgaben

H4.1. Die geometrische Folge

Für $q \in \mathbb{R}$ definieren wir $Q := \{q^n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$.

(a) Für $q > 1$ ist Q unbeschränkt.

(b) Für $0 < q < 1$ ist $\inf Q = 0$.

(c) Für $0 < q < 1$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$

(d) Für $|q| < 1$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$

Hinweis: (a) Bernoulli-Ungleichung, (d) Majorantenkriterium.

H4.2. Die Zinseszinsformel

Sei $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$, $n \in \mathbb{N}$.

a) (a_n) ist streng monoton steigend.
Hinweis: Man betrachte $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ und verwende die Bernoulli-Ungleichung.

b) (a_n) ist beschränkt.
Hinweis: Binomische Formel. Warum gilt $\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \le \frac{1}{k!} \le \frac{2}{2^k}$?

H4.3. Grenzwerte

Seien $x, y \in \mathbb{R}^+ = \{u \in \mathbb{R} \,|\, u > 0\}$. Bestimmen Sie den Grenzwert der folgenden Folgen:

(a) $\frac{1}{\sqrt{n}}$, (b) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, (c) $x^{1/n}$, (d) $(x^n + y^n)^{1/n}$.

H4.4. Geschachtelte Wurzel und Goldener Schnitt

Unter

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}}$$

versteht man die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_0 := 1$ und $a_{n+1} := \sqrt{1 + a_n}$. Sei q wie in Z4.4, also die positive Lösung der Gleichung $q^2 = 1 + q$.

Zeigen Sie: Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, und es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = q$.

Hausaufgabenabgabe: Mittwoch, 18.11.2015, zu Beginn der Vorlesung