TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

PROF. DR. M. KEYL
M. KECH

Mathematik für Physiker 2
(Analysis 1) MA9202

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9202_2015W

Wintersem. 2015/16
Blatt 3
(29.10.2015)

Zentralübung

Um den Ausfall der VL am 28.10.15 zu kompensieren werden ein paar Themen aus der VL in die Zentalübung am 30.10.15 verlagert. Dies betrifft die Kapitel 2.3 (Satz 2.9 und Dezimalzahlen) sowie 2.4 (Abzählbarkeit); vgl. hierzu die Mitschrift der VL im Web. Aus diesem Grunde werden am 30.10. keine Aufgaben behandelt.

Tutoraufgaben

T3.1. Darstellung komplexer Zahlen

Geben Sie folgende komplexe Zahlen jeweils in kartesischer und Polardarstellung an:

a) $1+\mathrm{i}$, b) $\frac{1}{\mathrm{i}}$, c) $(1+\mathrm{i})^2$, d) $\sqrt{\mathrm{i}}$, e) $\sqrt{-5+12\mathrm{i}}$.

T3.2. Multiplikation in Polardarstellung

Für $r, r', \varphi, \varphi' \in \mathbb{R}$ gilt $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \cdot r'\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi'} = rr'\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi+\varphi')}$.

T3.3. Eigenschaften von Konjugation und Betrag

Man zeige für $w, z \in \mathbb{C}$, $\varphi \in \mathbb{R}$:

(a) $\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}$, (c) $\overline{\overline{z}} = z$, (e) $\bar{w} \cdot \bar{z} = \overline{wz}$, (g) $|\overline{z}| = |z|$,
(b) $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}| = 1$, (d) $\bar{w} + \bar{z} = \overline{w+z}$, (f) $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$, (h) $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$, $z \neq 0$.

T3.4. Die Argumentfunktion

Die Argumentfunktion $\arg : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to (-\pi, \pi]$ ordnet jeder komplexen Zahl $z \neq 0$ denjenigen Winkel $\varphi \in (-\pi, \pi]$ zu, für den $z = |z|(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ gilt. Geben Sie $\arg(x+\mathrm{i}y)$ explizit mit Hilfe der inversen trigonometrischen Funktionen an.

T3.5. Linearfaktorabspaltung und Nullstellenzahl

(a) In jedem Körper $\mathbb{K}$ gilt: Ist p ein Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$ mit der Nullstelle $z_0 \in \mathbb{K}$, so gibt es ein Polynom q vom Grad $n-1$, so dass $\forall z \in \mathbb{K} : p(z) = (z - z_0)q(z)$.
(b) In jedem Körper $\mathbb{K}$ gilt: Ein Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$ besitzt höchstens n Nullstellen.

Hausaufgaben

H3.1. Darstellung komplexer Zahlen

Geben Sie folgende komplexe Zahlen jeweils in kartesischer und Polardarstellung möglichst explizit an:

a) $(1+\frac{1}{\mathrm{i}})^{-1}$, b) $(1+\mathrm{i})\,e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$, c) $\sqrt{3+4\mathrm{i}}$ d) $\sqrt{4+3\mathrm{i}}$.

HINWEIS: In (c) und (d) hilft der Ansatz $\sqrt{x+\mathrm{i}y} = u + \mathrm{i}v$.

H3.2. Der Betrag in $\mathbb{C}$

Man zeige für $w, z \in \mathbb{C}$:

(a) $|z| \geq 0$, $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

(b) $|wz| = |w| \cdot |z|$,

(c) $\mathrm{Re}(w\bar{z}) \leq |w||z|$,

(d) $|w + z| \leq |w| + |z|$.

HINWEISE: in (b) und (d) quadriere man beide Seiten, in (c) benutze man $\mathrm{Re}(z) \leq |z|$.

H3.3. Faktorisierung komplexer Polynome

Für jedes komplexe Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$ gibt es $c, z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$, so dass

$$p(z) = c(z - z_1) \cdots (z - z_n)$$

(wobei die z_k genau die, nicht notwendigerweise verschiedenen, Nullstellen von p sind).

H3.4. Komplexe Enheitswurzeln

Gegeben ist das komplexe Polynom $p(z) = z^7 - 1$.

(a) Beweisen Sie die geometrische Summenformel $\sum\limits_{k=0}^{n} z^k = \frac{z^{n+1}-1}{z-1}$ für $z \neq 1$, $n \in \mathbb{N}_0$.

(b) Spalten Sie von p den Linearfaktor $(z - 1)$ ab.

(c) Zerlegen Sie p vollständig in Linearfaktoren.

Hausaufgabenabgabe: Freitag, 13.11.2015, zu Beginn der Zentralübung