PROF. DR. M. KEYL
M. KECH

Mathematik für Physiker 2 (Analysis 1) MA9202

`http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9202_2015W`

Wintersem. 2015/16
Blatt 2
(22.10.2015)

Zentralübung

Z2.1. Manipulation von Summen

Seien $a : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$, $b : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ und $m, n \in \mathbb{N}_0$. Man beweise mit vollständiger Induktion

(a) $\sum\limits_{k=0}^{n} c\, a_k = c \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$,

(b) $\sum\limits_{k=0}^{n} (a_k + b_k) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k + \sum\limits_{k=0}^{n} b_k$,

(c) $\sum\limits_{k=m}^{n} a_k = \sum\limits_{k=0}^{n-m} a_{m+k}$,

(d) $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k = \sum\limits_{k=0}^{n} a_{n-k}$.

Z2.2. Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge

Sei $B(n, k)$ die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge.

(a) Man begründe, dass $B(n, k) = B(n-1, k) + B(n-1, k-1)$ ist, für $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0$.

(b) Man zeige mit vollständiger Induktion: $B(n, k) = \binom{n}{k}$.

Z2.3. Eindeutige Lösung additiver Gleichungen

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper mit der Addition $+$ und der Multiplikation $\cdot$. Man zeige nur mit Hilfe der Körperaxiome (A1) bis (A4), dass die Gleichung $a + x = b$ für alle $a, b \in \mathbb{K}$ eine eindeutige Lösung hat.

Z2.4. Folgerungen aus den Körperaxiomen

In einem Körper $\mathbb{K}$ gilt für alle $x, y \in \mathbb{K}$:

(a) $-(-x) = x$, (b) $(-x) + (-y) = -(x + y)$, (c) $0 \cdot x = 0$.

Z2.5. Betrag und Signum

Der Betrag und das Signum von $x \in \mathbb{R}$ sind definiert als

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0 \end{cases}, \qquad \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|}, & \text{falls } x \neq 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \end{cases}.$$

Es gilt $x = \operatorname{sgn}(x)|x|$, $|-x| = |x|$, $|xy| = |x||y|$. Mit welcher Beweismethode kann man dies zeigen (Stichwort genügt)?
Seien $a, x, x_0, y \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) $x \leq |x|$, $-x \leq |x|$

(b) $|x - x_0| < a$ genau dann, wenn $x_0 - a < x < x_0 + a$.

(c) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (*Dreiecksungleichung* in $\mathbb{R}$)

(d) $x^2 < y^2$ genau dann, wenn $|x| < |y|$.

(e) Wie kann $|u + v| \geq |u| - |v|$ auf die Dreiecksungleichung zurückgeführt werden?

Tutoraufgaben

T2.1. Rekursionsgleichung für die Binomialkoeffizienten, Binomische Formel

Zeigen Sie:

(a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, für $n \in \mathbb{N}_0$, $k \in \mathbb{Z}$.

(b) $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$ für $n \in \mathbb{N}_0$, $k \in \mathbb{Z}$.

(c) In jedem Körper $\mathbb{K}$ gilt für $a, b \in \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}_0$: $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

T2.2. Weitere Folgerungen aus den Körperaxiomen

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper mit der Addition $+$ und der Multiplikation $\cdot$. Man zeige nur mit Hilfe der Körperaxiome:

(a) Es gibt nur ein neutrales Element der Multiplikation.

(b) Die Gleichung $a \cdot x = b$ hat für alle $a, b \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$, eine eindeutige Lösung.

T2.3. Die Bernoulli-Ungleichung

Für alle $x > -1$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $(1+x)^n \geq 1 + nx$. Veranschaulichen Sie sich diese Ungleichung anhand des Graphen von $x \mapsto x^n$.

T2.4. Das Maximum einer Teilmenge der natürlicher Zahlen

(a) Man zeige: Jede nichtleere endliche Teilmenge A von $\mathbb{N}$ besitzt ein eindeutiges größtes Element m, das Maximum von A. In diesem Fall setzt man

$$\max A := m.$$

(b) Man zeige: Eine unendliche Teilmenge A von $\mathbb{N}$ besitzt kein Maximum.
Gilt auch die Umkehrung?

Hausaufgaben

H2.1. Arithmetische Summenformeln

Man beweise mit vollständiger Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+\frac{1}{2})(n+1)}{3}$, (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k = n$.

H2.2. (*) Alle StudentInnen studieren Physik

Mit vollständiger Induktion wird die Aussage "In einer gegebenen Menge von n Studenten haben alle das gleiche Studienfach" für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.
(*Induktionsanfang*) "$n = 1$": Offensichtlich richtig.
(*Induktionsschritt*) "$n \to n+1$": Sei eine Menge von $n+1$ Studenten gegeben. Wir nehmen einen Studenten heraus. Alle n Studenten der verbleibenden Menge studieren nach Induktionsvoraussetzung alle dasselbe, sagen wir Fach A. Fügen wir den verbleibenden (n+1)-ten Studenten zur Menge wieder hinzu und entnehmen ihr einen anderen Studenten, so folgt, dass auch der (n+1)-te Student A studiert, genau wie die anderen Studenten der Menge. Somit ist die Aussage für $n+1$ gezeigt.
Wir haben gesehen: Alle Studenten studieren dasselbe Fach. Wenn Sie sich selbst berücksichtigen, kann dieses Fach nur Physik sein!
Wo liegt der Fehler?

H2.3. Jede nichtleere Teilmenge der natürlicher Zahlen besitzt ein Minimum

Man zeige: Jede nichtleere Teilmenge A von $\mathbb{N}$ besitzt ein eindeutiges kleinstes Element m, das Minimum von A. Man setzt

$$\min A := m.$$

HINWEIS: Für die Existenz zeige man: besitzt $A \subset \mathbb{N}$ kein Minimum, dann ist $A = \emptyset$.

H2.4. Rechenregeln für Körper

In jedem Körper $\mathbb{K}$ gilt für alle $w, x \in \mathbb{K}$, $y, z \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$:

(a) $(-x) \cdot w = -(x \cdot w)$,

(b) $(y^{-1})^{-1} = y$,

(c) $y^{-1}z^{-1} = (yz)^{-1}$,

(d) $\frac{x}{y} \cdot \frac{w}{z} = \frac{x \cdot w}{y \cdot z}$, $\frac{x}{y} + \frac{w}{z} = \frac{x \cdot z + y \cdot w}{y \cdot z}$.

H2.5. Rechnen mit Ungleichungen

Man zeige nur mit Hilfe der Anordnungsaxiome P1 und P2 und den Rechenregeln für Körper, dass in jedem angeordneten Körper $\mathbb{K}$ gilt:

a) $x < y \Rightarrow -y < -x$,

b) $x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0$, insbes. $1 > 0$,

c) $0 < x < y \Rightarrow 0 < y^{-1} < x^{-1}$,

d) $v < w \wedge x < y \Rightarrow v + x < w + y$,

e) $z < 0 \wedge x < y \Rightarrow zx > zy$,

f) $0 < x < y \Rightarrow 0 < x^2 < y^2$,

Hausaufgabenabgabe: Mittwoch, 6.11.2015, zu Beginn der Vorlesung