TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

PROF. DR. M. KEYL
M. KECH

Mathematik für Physiker 2
(Analysis 1) MA9202

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9202_2015W

Wintersem. 2015/16
Blatt 1
(15.10.2015)

Zentralübung

Z1.1. Tautologien

Für zwei Aussagen A und B sind die folgenden Aussagen immer wahr – unabhängig vom Wahrheitswert von A und B.

a) $\big(A \wedge (A \Rightarrow B)\big) \Rightarrow B$
b) $\big(\neg A \Rightarrow (B \wedge \neg B)\big) \Rightarrow A$

Z1.2. Elementare Beweistechniken

Man beweise die folgenden Aussagen:

(a) $\forall n \in \mathbb{N} : 2|n \implies 2|n^2$.
(b) $\forall n \in \mathbb{N} : 2|n^2 \implies 2|n$.
(c) Es gibt unendlich viele Primzahlen.

HINWEIS: Für $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}$ bedeutet $m|n$, dass m ein Teiler von n ist.

Z1.3. $\sqrt{2}$ ist nicht rational

Wenn für die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ die aus der Schule bekannten Rechenregeln gelten, dann ist $\sqrt{2}$ nicht rational.

Z1.4. Bildmengen

Es seien M und N Mengen und $f : M \to N$ eine Abbildung.

a) Zeigen Sie: $\forall A, B \subset M : f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
b) Zeigen Sie: $\forall A, B \subset M : f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
c) Zeigen Sie an einem Beispiel, dass in 2. durchaus $\subsetneq$ möglich ist.

Tutoraufgaben

T1.1. Mengen

Gegeben seien die Menge $M = \{x \in \mathbb{N} \,|\, 1 \leq x \leq 10\}$ und deren Teilmengen $A = \{1, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 10\}$. Beschreiben Sie folgende Mengen durch Angabe aller Elemente

$$A \cup B, \quad A \cap B, \quad , M \setminus (A \cup B), \quad (M \setminus A) \cap B, \quad A \times (M \setminus B)$$

T1.2. Mengenoperationen

L, M, N seien Mengen. Zeigen Sie die folgenden Identitäten:

a) Assoziativgesetze: $(L \cup M) \cup N = L \cup (M \cup N)$ und $(L \cap M) \cap N = L \cap (M \cap N)$

b) Distributivgesetze: $L \cap (M \cup N) = (L \cap M) \cup (L \cap N)$ und $L \cup (M \cap N) = (L \cup M) \cap (L \cup N)$

T1.3. Graph einer Parabel

Sei $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto ax^2 + bx + c$.

(a) Bringen Sie auf Scheitelform und skizzieren Sie den Graphen von f.

(b) Ist f surjektiv oder injektiv?

(c) Definieren Sie zwei bijektive Funktionen $f_\pm$, deren Graphen den Graphen von f überdecken.

(d) Geben Sie die Umkehrfunktionen $f_\pm^{-1}$ an.

T1.4. Potenzmenge

Zeigen Sie, dass die Potenzmenge $P(M)$ der endlichen Menge $M = \{1, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$ die gleiche Mächtigkeit hat wie das kartesische Produkt $\{0, 1\}^n$.

Hausaufgaben

H1.1. Tautologien

Zeigen Sie für zwei Aussagen A und B, dass die folgenden Aussagen immer wahr sind – unabhängig vom Wahrheitswert von A und B.

a) $\big((A \Rightarrow B) \land (B \Rightarrow A)\big) \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow B)$

b) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \lor B)$

c) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$

H1.2. Absorptionsgesetze

M, N seien Mengen. Zeigen Sie die sogn. Absorptionsgesetze:

$$M \cap (M \cup N) = M \quad M \cup (M \cap N) = M$$

H1.3. Bildmengen

Welche der folgenden Aussagen gelten für alle Mengen M, N und alle Abbildungen $f : M \to N$? Geben Sie jeweils einen Beweis oder Gegenbeispiel an.

a) Für alle $X, Y \subset N$ gilt $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$.

b) Für alle $A \subset M$ gilt $f^{-1}(f(A)) = A$.

c) Wenn f surjektiv ist, so gilt $f^{-1}(f(A)) = A$ für alle $A \subset M$.

d) Wenn f injektiv ist, so gilt $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ für alle $A, B \subset M$.

H1.4. injektiv, surjektiv, bijektiv

Entscheiden Sie durch Beweis oder Gegenbeispiel, ob die folgenden Funktionen injektiv, surjektiv oder bijektiv sind.

(a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n + 1$,

(b) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto n + 1$,

(c) $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $(n, m) \mapsto n + m$,

(d) $f : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, $(n, m) \mapsto n + m$.

Hausaufgabenabgabe: Freitag, 30.10.2015, zu Beginn der Zentralübung