................
Note

| | |
|---|---|
| | |

Name

Vorname

Matrikelnummer

Studiengang (Hauptfach)

Fachrichtung (Nebenfach)

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Fakultät für Mathematik

# Klausur
# MA9202 Mathematik für Physiker 2
# (Analysis 1)

Prof. Dr. M. Keyl

5. April 2016, 8:00 – 9:30 Uhr

Hörsaal: ............. Reihe: ............. Platz: .............

## Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **9** Aufgaben

Bearbeitungszeit: **90** min

Erlaubte Hilfsmittel: **ein** selbsterstelltes DIN A4 Blatt

| | I | II |
|---|---|---|
| 1 | | |
| 2 | | |
| 3 | | |
| 4 | | |
| 5 | | |
| 6 | | |
| 7 | | |
| 8 | | |
| 9 | | |
| $\sum$ | | |

I ................
Erstkorrektur

II ................
Zweitkorrektur

## Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von ........ bis ........

Vorzeitig abgegeben um ........

Besondere Bemerkungen:

# Musterlösung (mit Bewertung)

1. **Vollständige Induktion** **[8 Punkte]**

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \geq 2$ gilt:

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{n}$$

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{k-1}{k}\right)=\frac{1}{n!}$$

LÖSUNG:

(a) *Induktionsbeginn:* $1 - 1/2 = 1/2$. **[1]**

*Induktionsschritt:* **[2]**

$$\prod_{k=2}^{n+1}\left(1-\frac{1}{k}\right)=\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{n}\frac{n+1-1}{n+1}=\frac{1}{n+1}$$

(b) *Induktionsbeginn:* $1 - 1/2 = 1/2$. **[1]**

*Induktionsschritt:* **[2]**

$$\prod_{k=2}^{n+1}\left(1-\frac{k-1}{k}\right)=\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{k-1}{k}\right)\left(1-\frac{n}{n+1}\right)=\frac{1}{n!}\left(1-\frac{n}{n+1}\right)=\frac{1}{n!}\frac{n+1-n}{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}$$

2. **Komplexe Zahlen** **[8 Punkte]**

(a) Bestimmen Sie Real– und Imaginärteil von $x = \bar{z}^2 + z^{-2}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $z = a + ib$.

$\operatorname{Re}(x) = (a^2 - b^2)\left(1 + \frac{1}{|z|^4}\right)$ **[2]**

$\operatorname{Im}(x) = -2ab\left(1 + \frac{1}{|z|^4}\right)$ **[2]**

(b) Geben Sie Betrag und Argument von $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)$ an.

$\left|\frac{1-i}{1+i}\right| = \quad 1$ **[2]**

$\arg\left(\frac{1-i}{1+i}\right) = \quad -\frac{\pi}{2}$ **[2]**

LÖSUNG:

(a) Es ist

$$\bar{z}^2 + \frac{1}{z^2} = \bar{z}^2 + \frac{\bar{z}^2}{z^2\bar{z}^2} = \bar{z}^2\left(1 + \frac{1}{|z|^4}\right) = (a^2 - b^2 - 2iab)\left(1 + \frac{1}{|z|^4}\right)$$

(b) Folgt aus

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{1-i}{1+i}\frac{1-i}{1-i} = \frac{-2i}{2} = -i$$

3. **Konvergenz von Folgen und Reihen** **[6 Punkte]**

(a) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{3n} - \sqrt{2n}$. **[2]**

☐ $= -\infty$ ☐ $= 0$ ☐ $= 2$ ☐ $= \frac{1}{2}$ ☐ $= 1$ ☒ $= \infty$ ☐ existiert nicht

(b) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{j}{n^2}$ **[2]**

☒ $\frac{1}{2}$ ☐ 1 ☐ 3 ☐ 0 ☐ $-\dfrac{1}{2}$ ☐ $\dfrac{2}{3}$ ☐ $\infty$ ☐ existiert nicht

(c) Gegen welchen Wert ist die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{3^n}$ eigentlich oder uneigentlich konvergent? **[2]**

☐ $= -\infty$ ☐ $= 3$ ☒ $= \frac{3}{4}$ ☐ $= \frac{4}{3}$ ☐ $= 1$ ☐ $= \infty$ ☐ keiner der angegebenen Werte

LÖSUNG:

(a) Es ist:

$$\sqrt{3n} - \sqrt{2n} = (\sqrt{3} - \sqrt{2})\sqrt{n}.$$

Da $\sqrt{n}$ streng monton steigend und unbeschränkt ist, konvergiert die Folge uneigentlich gegen $\infty$.

(b) Es ist:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{j}{n^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n} j = \frac{1}{n^2}\frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

(c) Offenbar ist $\cos(n\pi) = (-1)^n$. Somit erhalten wir eine geometrische Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{3}\right)^n = \frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$$

4. **Potenzreihe** **[8 Punkte]**

Bestimmen Sie den Konvergenzradius $R$ der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}\right)^n x^n$$

*Hinweis:* Benutzen Sie (ohne Beweis), dass $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ ist.

LÖSUNG:

Mit der Formel von Cauchy-Hadamard ist **[1]**:

$$R = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Also: **[2]**:

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}\left(\left|\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}\right|\right)^n} &= \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} \frac{n-1}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2+1}} \\ &= \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} \frac{n-1}{n} \frac{1}{\sqrt{1+1/n} + \sqrt{1+1/n^2}}\end{aligned}$$

Wegen Steitgkeit von $x \mapsto 1/x^2$ ist **[1]**:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} = 1.$$

Ferner ist **[2]**:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1 \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+1/n} + \sqrt{1+1/n^2}} = \frac{1}{2}$$

Grenzwertarithmetik liefert daher **[2]**:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left[\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}\left(\left|\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}\right|\right)^n}\right]^{-1} = 2$$

5. **Gleichmäßige Stetigkeit** **[4 Punkte]**
Negieren Sie die Aussage: $f$ ist auf dem Intervall $[0,1]$ gleichmäßig stetig.
*Hinweis:* Benutzen Sie die Defintion der gleichmäßigen Stetigkeit mittels Quantoren.
LÖSUNG:

Gleichmäßige Stetigkeit bedeutet **[1]**:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0, \text{ so dass für alle } x, y \in [0,1] \text{ gilt: } |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Die Negierung dieser Aussage ist **[3]**:

$$\exists \epsilon > 0, \text{ so dass } \forall \delta > 0 \text{ gilt: } \exists x, y \in [0,1] \text{ mit } |x-y| < \delta \text{ und } |f(x) - f(y)| > \epsilon.$$

6. **Grenzwerte von Funktionen** **[8 Punkte]**

Prüfen Sie ob die folgenden Grenzwerte existieren, und berechnen Sie sie gegebenenfalls.

(a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\sin(x)}-\cos(x)}{\arcsin(x)}$

(b) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-4x+3}{x^2-4}$

LÖSUNG:

(a) Es gilt $f(0) = 0$ und $g(0) = 0$ für $f = \sqrt{1+\sin(x)} - \cos(x)$ und $g(x) = \arcsin(x)$. Ferner sind $f$ und $g$ auf einer Umgebung von 0 differenzierbar und es gilt $g'(x) \neq 0$ für $x \in (-1,1) \setminus \{0\}$. Damit sind die Voraussetzungen für den Satz von L'Hospital erfüllt **[1]**.

Es gilt nun **[2]**

$$f'(x) = \frac{\cos(x)}{2\sqrt{1+\sin(x)}} + \sin(x) \qquad \text{und} \qquad g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Damit ist

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \left( \frac{\cos(x)}{2\sqrt{1+\sin(x)}} + \sin(x) \right) \sqrt{1-x^2} = \frac{1}{2}$$

Der gesuchte Grenzwert exisitiert daher und ist gleich

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1}{2} \quad \textbf{[1]}$$

(b) Die Funktion

$$h(x) = \frac{x^2-4x+3}{x^2-4} = \frac{x^2-4x+3}{(x+2)(x-2)}$$

ist rational und das Zählerpolynom hat in $x = 2$ keine Nullstelle. Damit ist der Satz von L'Hospital nicht anwendbar **[1]**. Vielmehr hat $h$ in $x = 2$ eine Polstelle 1. Ordnung, so dass die uneigentlichen rechts- und linksseitigen Grenzwerte existieren **[2]**:

$$\lim_{x\nearrow 2} \frac{x^2-4x+3}{(x+2)(x-2)} = -\infty \qquad \lim_{x\searrow 2} \frac{x^2-4x+3}{(x+2)(x-2)} = +\infty$$

Damit exisitiert $\lim_{x\to 2} h(x)$ nicht – auch nicht uneigentlich **[1]**.

7. **Taylorentwicklung** **[6 Punkte]**
Gegeben sei die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto \exp(-x^2)$.

(a) Bestimmen Sie die ersten vier Ableitungen von $f$. **[4]**

(b) Bestimmen Sie das Taylorpolynom 4. Ordnung $T_4f(x,1)$ um den Entwicklungspunkt 1. **[2]**

LÖSUNG:

(a) Die Ableitungen sind:

$$f'(x) = -2\,x\,e^{-x^2}, \qquad f''(x) = \left(4\,x^2-2\right)\,e^{-x^2}$$
$$f^{(3)}(x) = -\left(8\,x^3-12\,x\right)\,e^{-x^2}, \quad f^{(4)}(x) = \left(16\,x^4-48\,x^2+12\right)\,e^{-x^2}$$

(b) Das Taylorpolynom ist

$$T_4f(x,1) = e^{-1} - 2\,e^{-1}\,(x-1) + e^{-1}\,(x-1)^2 + \frac{2\,(x-1)^3}{3\,e} - \frac{5\,(x-1)^4}{6\,e}$$

8. **Stammfunktionen** **[9 Punkte]**

Gegeben Sie für die folgenden Funktionen Stammfunktionen an:

$$\int \sqrt{(1+x)^3}dx = \boxed{\tfrac{2}{5}(1+x)^{5/2}}$$ **[3]**

$$\int x\sqrt{1+x}dx = \boxed{\tfrac{-2}{3}(1+x)^{3/2} + \tfrac{2}{5}(1+x)^{5/2}}$$ **[3]**

$$\int \frac{x^3\,dx}{1+x^4} = \boxed{\tfrac{1}{4}\ln(1+x^4)}$$ **[3]**

Lösung:

*1. Integral.* Mit der Substitution: $y(x) = 1+x$ ist

$$\int \sqrt{(1+x)^3}dx = \int y^{3/2}dy = \frac{2}{5}y^{5/2} = \frac{2}{5}(1+x)^{5/2}$$

*2. Integral.* Wir wählen:

$$f(x) = x \qquad f'(x) = 1 \qquad g(x) = \frac{2}{3}(1+x)^{3/2} \qquad g'(x) = \sqrt{1+x}$$

Partielle Integration liefert somit:

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{1+x}dx &= \int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx \\ &= \frac{2}{3}\left[x(1+x)^{3/2} - \int (1+x)^{3/2}dx\right] = \frac{2}{3}\left[x(1+x)^{3/2} - \frac{2}{5}(1+x)^{5/2}\right]\end{aligned}$$

Für die Lösung bis zu diesem Punkt gibt es volle Punktzahl. Allerdings können wir den Ausdruck noch etwas umformen:

$$\begin{aligned}x(1+x)^{3/2} - \frac{2}{5}(1+x)^{5/2} &= \left(x - \frac{2}{5}(1+x)\right)(1+x)^{3/2} = \left(\frac{3}{5}x - \frac{2}{5}\right)(1+x)^{3/2} \\ &= \left(\frac{3}{5}(1+x) - 1\right)(1+x)^{3/2} = \frac{3}{5}(1+x)^{5/2} - (1+x)^{3/2}\end{aligned}$$

Damit also

$$\int x\sqrt{1+x}dx = \frac{-2}{3}(1+x)^{3/2} + \frac{2}{5}(1+x)^{5/2}$$

*3. Integral.* Wir substituieren $y(x) = 1+x^4$ mit $y'(x) = 4x^3$. Dies ergibt:

$$\int \frac{x^3\,dx}{1+x^4} = \int \frac{1}{4}\frac{y'(x)}{y(x)}dx = \frac{1}{4}\ln(1+x^4)$$

9. **Matrixexponential** **[6 Punkte]**

Berechnen Sie explizit $\exp\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&t&1\end{pmatrix}$.

LÖSUNG:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&t&1\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{=\mathbb{1}} + \underbrace{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&t&0\end{pmatrix}}_{=:B}.$$

$\mathbb{1}$ und $B$ kommutieren trivialerweise, **[1]**

und $B^2 = 0$. **[1]**

Somit ist

$$\exp\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&t&1\end{pmatrix} = \exp(\mathbb{1}+B) \overset{[\mathbf{1}]}{=} \exp(\mathbb{1})\exp(B) \overset{[\mathbf{2}]}{=} e\mathbb{1}(\mathbb{1}+B) \overset{[\mathbf{1}]}{=} \begin{pmatrix}e&0&0\\0&e&0\\0&te&e\end{pmatrix}.$$