

.....
Note

Name

Vorname

Matrikelnummer

Studiengang (Hauptfach)

Fachrichtung (Nebenfach)

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Fakultät für Mathematik

Klausur

MA9202 Mathematik für Physiker 2

(Analysis 1)

Prof. Dr. M. Keyl

5. April 2016, 8:00 – 9:30 Uhr

Hörsaal: Reihe: Platz:

Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **9** Aufgaben

Bearbeitungszeit: **90** min

Erlaubte Hilfsmittel: **ein** selbsterstelltes DIN A4 Blatt

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		

Σ		
----------	--	--

I
Erstkorrektur

II
Zweitkorrektur

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von bis

Vorzeitig abgegeben um

Besondere Bemerkungen:

1. **Vollständige Induktion**

[8 Punkte]

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \geq 2$ gilt:

$$\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n}$$

$$\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{k-1}{k}\right) = \frac{1}{n!}$$

2. Komplexe Zahlen

[8 Punkte]

- (a) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil von $x = \bar{z}^2 + z^{-2}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $z = a + ib$.

$$\operatorname{Re}(x) =$$

$$\operatorname{Im}(x) =$$

- (b) Geben Sie Betrag und Argument von $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)$ an.

$$\left|\frac{1-i}{1+i}\right| =$$

$$\arg\left(\frac{1-i}{1+i}\right) =$$

3. Konvergenz von Folgen und Reihen

[6 Punkte]

(a) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{3n} - \sqrt{2n}$.

$= -\infty$ $= 0$ $= 2$ $= \frac{1}{2}$ $= 1$ $= \infty$ existiert nicht

(b) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \frac{j}{n^2}$

$\frac{1}{2}$ 1 3 0 $-\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$ ∞ existiert nicht

(c) Gegen welchen Wert ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{3^n}$ eigentlich oder uneigentlich konvergent?

$= -\infty$ $= 3$ $= \frac{3}{4}$ $= \frac{4}{3}$ $= 1$ $= \infty$ keiner der angegebenen Werte

4. Potenzreihe

[8 Punkte]

Bestimmen Sie den Konvergenzradius R der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + 1} \right)^n x^n$$

Hinweis: Benutzen Sie (ohne Beweis), dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ ist.

5. **Gleichmäßige Stetigkeit**

[4 Punkte]

Negieren Sie die Aussage: f ist auf dem Intervall $[0, 1]$ gleichmäßig stetig.

Hinweis: Benutzen Sie die Definition der gleichmäßigen Stetigkeit mittels Quantoren.

6. Grenzwerte von Funktionen**[8 Punkte]**

Prüfen Sie ob die folgenden Grenzwerte existieren, und berechnen Sie sie gegebenenfalls.

(a)
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin(x)} - \cos(x)}{\arcsin(x)}$$

(b)
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 4}$$

7. Taylorentwicklung

[6 Punkte]

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \exp(-x^2)$.

- (a) Bestimmen Sie die ersten vier Ableitungen von f .
- (b) Bestimmen Sie das Taylorpolynom 4. Ordnung $T_4 f(x, 1)$ um den Entwicklungspunkt 1.

8. Stammfunktionen

[9 Punkte]

Gegeben Sie für die folgenden Funktionen Stammfunktionen an:

$$\int \sqrt{(1+x)^3} dx = \text{[]}$$

$$\int x\sqrt{1+x} dx = \text{[]}$$

$$\int \frac{x^3 dx}{1+x^4} = \text{[]}$$

9. Matrixexponential

[6 Punkte]

Berechnen Sie explizit $\exp \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & t & 1 \end{pmatrix}$.