7.7 Integration von Funktionenfolgen

Problem: Riemannsche Integrale und punktweise Konvergenz sind unverträglich z. B.:

- $f_n : I \to \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$, I Intervall
  $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ punktweise $\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \ \forall x \in I\right)$.
- $\int\limits_I f_n(x)\,dx$ konvergent für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\not\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \int_I f_n(x)\,dx = \int_I f(x)\,dx$$

Bsp 1: Sei $q : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \cap [0,1]$ bijektiv (also eine Abzählung von $\mathbb{Q} \cap [0,1]$). Wir definieren:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \{q_1, \dots, q_n\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Offenbar hat f_n nur endlich viele Unstetigkeitsstellen, so dass $\int_0^1 f_n(x)\,dx = 0$ gilt. Andererseits ist:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

also ist f nicht integrierbar.

Bsp 2: $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [n-1, n+1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ aber:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = 2 \neq 0 = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx.$$

<u>Lösung</u>: Gleichmäßige Konvergenz. Zur Erinnerung (Def 5.18):

$$f_n \to f \text{ glm} \Leftrightarrow \sup_x |f_n(x) - f(x)| \to 0,\ n \to \infty$$

Diese Methode war bereits im Zusammenhang mit Stetigkeit (Satz 5.19) und Ableitungen (Satz 6.10) erfolgreich.

<u>Satz 7.28</u>: $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $f_n \to f$ glm für $n \to \infty$
$\Rightarrow$ f ist auf $[a,b]$ intbar und

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

<u>Bew</u>: Mit Satz 5.19 folgt: f ist stetig wg Satz 7.5 also auch intbar. Ferner:

$$\left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right| = \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x))\,dx \right| \leq$$

$$\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \leq (b-a) \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|$$

Wg glm. Konvergenz: $\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \to 0$ für $n \to \infty$ $\Rightarrow$ die Behauptung □.

<u>Bem</u>: Wir sind jetzt in der Lage den Beweis für Satz 6.10 nachzureichen. Zur Erinnerung: Es war zu zeigen:

$f_n \in C^1((a,b))$, $f_n \to f$ punktweise konv., f_n' glm konv.
$\Rightarrow$ $f \in C^1((a,b))$ und $\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x)$.

<u>Bew</u>: Glm. Konvergenz von f_n' führt zusammen mit Satz

Satz 5.19 zur Stetigkeit von $g: (a,b) \to \mathbb{R}, x \mapsto g(x) := \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$

Ferner folgt mit $x, c \in (a,b)$ aus dem HDI (Satz 7.14)

$$f_n(x) = \int_c^x f_n'(y)\,dy + f_n(c)$$

mit Satz 7.28 also:

$$f(x) = \int_c^x g(y)\,dy + f(c)$$

f ist also Stammfunktion von g (Satz 7.12). Damit:
$f \in C^1((a,b))$ und $f' = g$. q.e.d. $\square$

<u>Bsp:</u> Integration von Potenzreihen.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k \quad \text{Konv. Rad. } R \in (0, \infty].$$

Wegen Satz 5.20 ist die Konvergenz auf jedem Intervall $[c,d] \subset (a-R, a+R)$ glm. Mit Satz 7.28 ist f auf $[c,d]$ also integrierbar und

$$\int_c^d f(x)\,dx = \int_c^d \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_c^d a_k (x-a)^k\,dx$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left[\frac{(x-a)^{k+1}}{k+1}\right]_c^d = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} \left[(d-a)^{k+1} - (c-a)^{k+1}\right]$$