6.6 Regel von L'Hospital

Satz 6.20: (l'Hospitalsche Regel): $f, g: (a,b) \to \mathbb{R}$ diffbar, $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a,b)$. x_0 sei einer der Randpunkte. In jeder der beiden Situationen

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$$

gilt: Existiert $\lim_{x \to x_0} f'(x)/g'(x)$ so ist

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Bew: Wir betrachten nur $x_0 = a$ und $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Alle anderen Fälle lassen sich ähnlich beweisen (vgl. Königsberger 9.4). Wir setzen f, g in x_0 durch $f(x_0) = g(x_0) = 0$ stetig fort und wenden den verallgemeinerten Mittelwertsatz auf das Intervall $[x_0, x]$ an. D.h. es gibt ein $y \in (x_0, x)$, so dass

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - \overbrace{f(x_0)}^{=0}}{g(x) - \underbrace{g(x_0)}_{=0}} = \frac{f'(y)}{g'(y)}$$

Nun gilt: $x \to x_0 \Rightarrow y \to x_0 \Rightarrow$ Die Behauptung. □

Bem: Der verallgemeinerte Mittelwertsatz gilt auch, wenn wir die Voraussetzungen auf: $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$ und diffbar auf (a,b) abschwächen. Darum müssen wir im Beweis von 6.20 nicht auf Diffbarkeit (der Fortsetzungen von) f, g auf $[a, b)$ in $x_0 = a$ testen.

Bem: Der Satz gilt auch für Grenzwerte $\lim\limits_{x \to \pm\infty}$, also für Fälle mit $a = -\infty$ und/oder $b = +\infty$.

Bsp 1: $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln x}{x^{-1}} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = 0$

Bsp 2: $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x \cdot \sin x} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x \cos x + \sin x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{2 \cos x - x \sin x} = 0$

2. Ableitungen, da Zähler, Nenner noch immer $= 0$!

Bem: Manchmal hilft es zu höheren Ableitungen zu gehen!