6.4 Ableitung von Funktionenfolgen

$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\sin(nx)}{n} \Rightarrow$

- $f_n \to 0$ gleichmäßig, $\left(\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| \le \frac{1}{n} \right)$
- f_n ist diffbar mit $f_n'(x) = \cos(nx)$

Aber: $f_n'(x)$ divergent für $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$.

Also: Glm. Konvergenz ist nicht ausreichend um Konvergenz der Abl. zu garantieren. Daher:

6.10 Satz: $f_n \in C^1((a,b))$ mit:
- (f_n) konvergiert punktweise gegen $f: (a,b) \to \mathbb{R}$
- (f_n') konvergiert gleichmäßig.

$\Rightarrow f \in C^1((a,b))$ und $f_n' \to f'$ punktweise.

Bew: Kap. 7 $\square$

Bem: Wir wollen diesen Satz insbesondere auf Potenzreihen anwenden, und benötigen daher das folgende Lemma:

5.11 Lemma: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ Potenzreihe mit Konvergenzradius $R \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k k z^{k-1}$ hat ebenfalls KRad. R.

Bew: (Skizze) Wir benutzen $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ (vergl. Übungsaufgabe H5.1) und die Formel von Cauchy-Hadamard: Für den Konv.Rad $\tilde{R}$ von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k k z^{k-1}$ erhalten wir:

$$\tilde{R} = \frac{1}{\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{n |a_n|}} = \frac{1}{\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = R \quad \square$$

5.12 Satz: Sei $R \in [0,\infty]$ Konv. Rad. von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$ mit $a_k, a \in \mathbb{R}$, dann ist $P: (a-R, a+R) \to \mathbb{R}$ diffbar mit $P'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k (x-a)^{k-1}$.

Bew: Die Partialsummen $\sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k =: P_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$ sind stetig diffbar. Ferner:

- $\lim_{n\to\infty} P_n(x) = P(x)$ für $x \in (a-R, a+R)$
- $P_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k k (x-a)^{k-1}$ konvergieren wg Satz 5.20 und Lemma 6.11 glm auf $[a-\varrho, a+\varrho]$ mit $\varrho < R$.

$\Rightarrow$ Die Behauptung mit Satz 6.10. $\square$

Bsp: Geometrische Reihe: $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ für $|x|<1$.

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx}\frac{1}{1-x} = P'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1} \text{ für } |x|<1.$$

Potenzreihenentwicklung von $(1-x)^{-2}$ auf $D = \{x \in \mathbb{R} \mid |x|<1\}$.