6.3 Höhere Ableitungen

Def 6.8: $f: D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}$ heißt **k-mal differenzierbar** $(k \in \mathbb{N})$ mit **k-ter Ableitung** $f^{(k)}: D \to \mathbb{R}$, wenn $f^{(k-1)}$ diffbar und $f^{(k)} = f^{(k-1)\prime}$ ist. f heißt **k-mal stetig differenzierbar** wenn $f^{(k)}: D \to \mathbb{R}$ stetig ist.

Bem: Für $x_0 \in D$ können wir auch definieren: f k-mal Diffbar in x_0 $:\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0: f: D \cap (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \to \mathbb{R}$ ist $k-1$ mal diffbar, und $f^{(k-1)}$ ist diffbar in x_0. $f^{(k)}(x_0) = (f^{(k-1)})'(x_0)$ ist dann wieder die k-te Ableitung in x_0.

Bem: Wir schreiben: $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$.
oder auch: $\frac{d^n f}{dx^n} = D^n f = f^{(n)}$.

Bem: $C^k(D) := \{ f: D \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist } k\text{-mal stetig diffbar} \}$
Insbesondere: $C(D) := C^{(0)}(D) = \{ f: D \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig} \}$.
$C^\infty(D) = \{ f: D \to \mathbb{R} \mid \forall k \in \mathbb{N}: f \text{ ist } k\text{-mal stetig diffbar} \}$

Es gilt für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$C^{k-1}(D) \supsetneq \{ f \text{ k-mal diffbar} \} \supsetneq C^k(D)$$

Insgesamt: $C^0(D) \supsetneq C^1(D) \supsetneq C^2(D) \supsetneq \dots \supsetneq C^\infty(D)$

Elemente von $C^\infty(D)$ heißen **glatt**.

Bsp: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

f ist diffbar mit (Übung!):

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Also ist f diffbar, aber in $x=0$ nicht stetig.

6.9 Def: $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ n-mal diffbar in $x_0 \in D$ ($n \in \mathbb{N}_0$).

$$(T_n f)(x, x_0) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

heißt Taylorpolynom der Ordnung n von f um x_0

Bsp: $(T_n \exp)(x, 0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\exp'(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$

Wir wissen, dass die Partialsummen $\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ die Exponentialfunktion exp beliebig genau approximieren. Gilt etwas ähnliches auch für ein bel. $f \in C^k(D)$ und ihr Taylorpolynom $T_n f$? Genauer gefragt: Wie gut ist die Approximation von f durch $T_n f$? Für eine Antwort benötigen wir Integralrechnung. Daher vertagen wir die Antwort auf Kap. 8.