5.6 Potenzreihen

Satz 5.20: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^k$ Potenzreihe mit Konvergenzradius R und $\varrho < R \Rightarrow$

$$f_n : \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| \leq \varrho\} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k (z-a)^k$$

konvergiert glm. gegen:

$$f : \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| \leq \varrho\} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^k$$

Bew: Wir müssen für $z \in \mathbb{C}$ zeigen:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{|z-a|\leq\varrho} |f_n(z) - f(z)| = 0$$

Also:

$$\sup_{|z-a|\leq\varrho} |f_n(z) - f(z)| = \sup_{|z-a|\leq\varrho} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k (z-a)^k \right| \leq$$

$$\leq \sup_{|z-a|\leq\varrho} \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| |z-a|^k \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \varrho^k$$

Damit:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{|z-a|\leq\varrho} |f_n(z) - f(z)| \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \varrho^k = 0$$

da die Potenzreihe für $\varrho < R$ absolut konvergiert. □

Satz 5.21: Jede Potenzreihe mit Konvergenzradius R ist auf $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < R\}$ stetig.

Bew: Folgt aus den Sätzen 5.19 und 5.20. □

<u>Bsp:</u> sin, cos, exp sind auf $\mathbb{C}$ stetig. tan, cot sind als Quotientenfunktionen auf ihrem Def.bereich ebenfalls stetig. Stetigkeit von $\ln: (0,\infty) \to \mathbb{R}$, und anderer Umkehrfunktionen (arcus, area) folgt mit Übungsaufgabe Z 8.2.