5.4 Gleichmäßige Stetigkeit

Gemäß der „ε-δ" – Definition ist eine Abb $f: M \to N$ stetig im Punkt x wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \forall x \in M: d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x_0))$$

Dabei kann δ nicht nur von ε sondern auch von x abhängen. Siehe z.B. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ Aufgabe T8.1. Die nächste Definition schließt diesen Fall aus.

Def 5.15: $f: M \to N$ heißt **gleichmäßig stetig** $:\Longleftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \forall x, y \in M: d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Bsp 1: Für $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ ist:

$$|x^2 - y^2| = |x-y||x+y| = |x-y||x-x+x+y| = \underbrace{|x-y|}_{<\delta}\underbrace{|2x-(x-y)|}_{\geq 2|x|-|x-y|}$$

Also kann $|x^2-y^2|$ bei $|x-y| < \delta$ beliebig groß werden. Daher ist f nicht glm. stetig.

Bsp 2: $f\ [-a, a] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2,\ a \in \mathbb{R}^+$. Ähnlich wie eben ist:

$$|x^2 - y^2| = |x-y||x+y| \leq |x-y|\, 2a$$

Also gilt $|x-y| < \delta = \frac{\varepsilon}{2a} \Rightarrow |x^2-y^2| < \varepsilon$. f ist somit glm. stetig.

Dieses Bsp. deutet an, dass sich stetige Funktionen auf kompakten Intervallen gutartiger zu verhalten scheinen als auf bel. Defbereichen. Der nächste Satz zeigt, dass dies in der Tat der Fall ist.

Satz 5.16: Eine stetige Funktion $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$ ist gleichmäßig stetig.

Bew: Übungsaufgabe. $\square$