## 4.4 Potenzreihen

**Def. 4.15:** Eine Reihe der Form $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^k$ mit Koeffizienten $a_k \in \mathbb{C}$, Variable $z \in \mathbb{C}$ und Entwicklungspunkt $a \in \mathbb{C}$ heißt Potenzreihe.

$$R = \sup\{|z-a| \mid z \in \mathbb{C} \wedge \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^k \text{ konvergiert}\}$$

heißt Konvergenzradius von $\sum_k a_k (z-a)^k$.

Bem: $R$ kann sowohl $0$ als auch $\infty$ sein ($0 \leq R \leq \infty$).

Bsp: Die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ ist eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R = 1$.

**Satz 4.16:** Sei $R \in [0,\infty]$ der Konvergenzradius von $\sum_k a_k (z-a)^k$, dann gilt:

1. $|z-a| < R \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^k$ konvergiert absolut
2. $|z-a| > R \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^k$ divergiert
3. Es gilt die Formel von Cauchy-Hadamard:

$$R = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$$

Bew: OBdA sei $a = 0$.

zu 1. Für $z \in \mathbb{C}$, $|z| < R$ gibt es ein $z_1 \in \mathbb{C}$ mit $|z| < |z_1| < R$ und $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z_1^k$ konvergiert. Insbesondere ist $(a_k z_1^k)$ eine Nullfolge (Satz 4.3). Also gilt $\forall k \in \mathbb{N}_0$:

$$|a_k z^k| = |a_k z_1^k| \underbrace{\left|\frac{z}{z_1}\right|}_{<1!}^k \le \sup_{m\in\mathbb{N}_0} |a_m z_1^m| \left|\frac{z}{z_1}\right|^k$$

Da $(a_k z_1^k)$ Nullfolge ist existiert das Supremum. Die absolute Konvergenz von $\sum a_k z^k$ folgt aus der Konvergenz von $\sum_k \left|\frac{z}{z_1}\right|^k$ (wg. $\left|\frac{z}{z_1}\right| < 1$!) und dem Majoranten-kriterium. (Satz 4.6)

zu 2. trivial.

zu 3. Es gilt:

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k z^k|} = |z| \overbrace{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}^{=:\rho}$$

Mit dem Wurzelkriterium (Satz 4.8) folgt nun

$\sum_k a_k z^k$ konvergent wenn $|z|\rho < 1$

$\sum_k a_k z^k$ divergent wenn $|z|\rho > 1$

Also ist der Konvergenzradius $1/\rho$ wie behauptet. $\square$