3.5 Cauchyfolgen

Def 3.17: Eine reelle Folge (a_n) heißt **Cauchyfolge** wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon : \forall n, m > N_\varepsilon : \ |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Satz 3.18: Eine reelle Folge (a_n) konvergiert genau dann wenn sie eine Cauchyfolge ist.

Bew: Ist (a_n) konvergent gilt mit $a = \lim_{n\to\infty} a_n$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > N_\varepsilon : \ |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Also:

$$|a_n - a_m| = |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n, m > N_\varepsilon$$

und somit ist (a_n) Cauchyfolge wie behauptet.

Ist (a_n) umgekehrt eine Cauchyfolge, dann ist (a_n) zunächst beschränkt, denn für $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a_{N_\varepsilon + 1}| < \varepsilon \quad \forall n > N_\varepsilon \quad (*)$$

also:

$$\min\{a_1, \dots, a_{N_\varepsilon}, a_{N_\varepsilon - 1} - \varepsilon\} \leq a_n \leq \max\{a_1, \dots, a_{N_\varepsilon}, a_{N_\varepsilon - 1} + \varepsilon\}$$

Aus Beschränktheit folgt, dass $\limsup_{n\to\infty} a_n$ und $\liminf_{n\to\infty} a_n$ existieren und HP sind (Satz 3.15).

Andererseits ist (mit $\varepsilon>0$, N_ε wie eben und wg. ⊛ letzte Seite):

$$\overline{a}_{N_\varepsilon+1} = \sup\{a_n \mid n \geq N_\varepsilon+1\} < a_{N_\varepsilon+1}+\varepsilon$$

$$\underline{a}_{N_\varepsilon+1} = \inf\{a_n \mid n \geq N_\varepsilon+1\} > a_{N_\varepsilon+1}-\varepsilon$$

Also: $|\overline{a}_{N_\varepsilon+1} - \underline{a}_{N_\varepsilon+1}| < \varepsilon$. Monotonie der Folgen $(\underline{a}_n)$ und $(\overline{a}_n)$ ergibt: $|\underline{a}_n - \overline{a}_n| < \varepsilon \ \forall n > N_\varepsilon$.

Also (da $\varepsilon>0$ bel. gewählt war):

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \overline{a}_n = \lim_{n\to\infty} \underline{a}_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$$

Mit Satz 3.15 folgt, dass (a_n) gegen $a = \limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$ konvergiert. $\square$

Bem: Mittels dieses Kriteriums können wir Konvergenz einer Folge beweisen ohne den Grenzwert zu kennen.

Bem: Auch wenn das aus dem Beweis nicht deutlich hervorgeht, so ist die Ordnungsvollständigkeit von $\mathbb{R}$ eine wesentliche Voraussetzung für diese Aussage (in der Tat wurde Ordnungsvollständigkeit schon für Satz 3.8 benutzt). Man kann sogar zeigen:

$\mathbb{R}$ ist ordnungsvollständig $\Longleftrightarrow$ Jede Cauchyf. in $\mathbb{R}$ konvergiert.

Bem: Warum führen wir eigentlich einen neuen Begriff ein (Cauchyfolge) der am Ende doch äquivalent zu einem bereits bekannten Konzept (Konvergenz) ist? Der Grund hierfür ist, dass die Folgerung $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge $\Rightarrow$ (a_n) konvergent eine spezielle Eigenschaft von $\mathbb{R}$ ist. Betrachten wir nämlich Folgen in $\mathbb{Q}$ dann gibt es dort Cauchyfolgen die in $\mathbb{Q}$ keinen Grenzwert haben (weil sie gegen eine irrationale Zahl wie $\sqrt{2}$ konvergieren; vergl. die Quadratwurzelfolge aus Abschnitt 3.3) – Folgen also die in $\mathbb{Q}$ nicht konvergieren

Bem: Die Beobachtung, dass Cauchyfolgen in $\mathbb{Q}$ im allgemeinen nicht in $\mathbb{R}$ aber immer konvergieren, kann benutzt werden, um reelle Zahlen konstruktiv als Äquivalenzklassen von Cauchyfolgen einzuführen, vergl. Behrends, Kap 2.3.