3.3 Grenzwertarithmetik

Zentrale Aussage dieses Abschnittes ist der folgende Satz.

Satz 3.11: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
3. $b \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$
4. $a_n \geq b_n \Rightarrow a \geq b$

Bew: Wir zeigen 1. und 3. der Rest ist eine Übungsaufgabe.

zu 1. $\varepsilon > 0$ sei beliebig und $N_\varepsilon, M_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a| < \varepsilon \ \forall n > N_\varepsilon \ \wedge \ |b_n - b| < \varepsilon \ \forall n > M_\varepsilon$$

Damit für $n > \max(N_\varepsilon, M_\varepsilon)$:

$$|a_n + b_n - (a+b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Also $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$ wie behauptet.

zu 3. Wg. 2. reicht es für $b \neq 0$ zu zeigen: $\lim\limits_{n\to\infty} b_n^{-1} = b$.

Wg. $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ gilt

$$|b_n - b| < \frac{|b|}{2} \quad \text{f.f.a. } n \in \mathbb{N}$$

denn wir können einfach $\varepsilon = |b|/2$ wählen. Damit

$$|b_n| = |b - b + b_n| \underset{\text{inv. }\Delta\text{-Ungl.}}{\geq} |b| - |b - b_n| > |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2} \quad \text{f.f.a. } n \in \mathbb{N}.$$

Ferner:

$$0 \leq \left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b-b_n|}{|b||b_n|} < \frac{|b-b_n|}{|b|\frac{|b|}{2}} = \frac{2|b-b_n|}{|b|^2} \quad \text{f.f.a. } n \in \mathbb{N}$$

letzte Ungl.

Wegen $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ ist $\lim_{n\to\infty} \frac{2|b-b_n|}{|b|^2} = 0$ und das Einschließungskriterium [Satz 3.10] liefert:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b} \quad \text{qed } \square$$

<u>Bsp:</u> Wir betrachten die rekursive Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right), \quad n \in \mathbb{N}, \; a_1 > 0, \; x > 0.$$

Die Folge ist nach unten beschränkt:

$$a_{n+1}^2 = \frac{1}{4}\left(a_n^2 + 2x + \frac{x^2}{a_n^2}\right) = \frac{1}{4}\left(a_n - \frac{x}{a_n}\right)^2 + x \geq x$$

Die Folge ist (ab $n \geq 2$) monoton fallend:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{a_n} - a_n\right) = \frac{1}{2}\,\frac{x - a_n^2}{a_n} \leq 0$$

Da $a_n^2 \geq x$ für $n \geq 2$

Damit konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Zur Bestimmung des Grenzwertes betrachten wir die Folge

$$\tilde{a}_n = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

Grenzwertarithmetik (Satz 3.11) führt zu

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{a}_n = \frac{1}{2}\left(a + \frac{x}{a}\right) \quad \text{mit } a = \lim_{n\to\infty} a_n$$

Zusätzlich ist aber $\tilde{a}_n = a_{n+1}$ also $\lim_{n\to\infty} \tilde{a}_n = a$. Damit:

$$a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{x}{a}\right) \Rightarrow a^2 = x \quad \text{also: } a = \sqrt{x}.$$