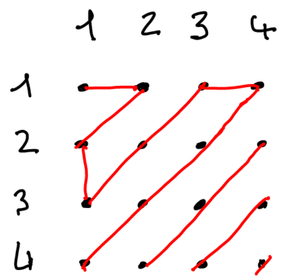
2.4 Abzählbarkeit

Zur Erinnerung: Eine unendliche Menge M heißt abzählbar (sonst überabzählbar) wenn es eine bijektive Abb. $f: \mathbb{N} \to M$ gibt.

Satz 2.10: $\mathbb{Q}$ ist abzählbar.

Bew: (Skizze). Es genügt zu zeigen, dass $\mathbb{N}^2$ abzählbar ist. $\mathbb{N}^2$ aber wird wie folgt abgezählt:



Für $\mathbb{Q}$ kann man alle Paare (q,p) überspringen, die nicht teilerfremd sind. □

Bem: Das skizzierte Beweisverfahren heißt „Cantorsches erstes Diagonalverfahren".

Satz 2.11: $\mathbb{R}$ ist überabzählbar.

Bew: (Skizze) Beweis durch Widerspruch. Zunächst reicht es nur das Intervall $(0,1)$ zu betrachten. Angenommen, dieses wäre abzählbar, dann gäbe es eine bijektive Abb. $\mathbb{N} \ni n \mapsto x_n \in (0,1)$. Die x_n können wir als Dezimalzahl schreiben:

$$x_1 = 0.x_{11}\,x_{12}\,x_{13}\,x_{14}\ldots$$

$$x_2 = 0.x_{21}\,x_{22}\,x_{23}\,x_{24}\ldots$$

$$x_3 = 0.\, x_{31}\, x_{32}\, x_{33}\, x_{34} \cdots$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$x_n = 0.\, x_{n1}\, x_{n2}\, x_{n3}\, x_{n4} \cdots x_{nn} \cdots x_{nm} \cdots$$

Aus den Diagonalelementen konstruieren wir eine neue Zahl $y = 0.\, y_1\, y_2 \cdots y_m \cdots$ mit folgender Regel:

$$y_m = \begin{cases} 4 & \text{wenn } x_{mm} = 5 \\ 5 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: $y_n \neq x_{nn}$, also $y \neq x_n \ \forall n \in \mathbb{N}$, im Widerspruch zur Annahme, dass $n \mapsto x_n$ bijektiv ist. $\square$

<u>Bem:</u> Das angegebene Argument heißt „Cantors zweites Diagonalargument."

<u>Bem:</u> 1) $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ heißt irrationale Zahl. Es gibt „mehr" (nämlich überabzählbar viele) irrationale als rationale Zahlen.

2) Trotzdem liegt $\mathbb{Q}$ „dicht" in $\mathbb{R}$. D.h. (wie im letzten Abschnitt gesehen) für jedes $x \in \mathbb{R}$ und jede Genauigkeit $\varepsilon > 0$ finden wir ein $q_\varepsilon \in \mathbb{Q}$ so dass $q_\varepsilon \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ ist.