1.3 Vollständige Induktion

Prinzip der vollst. Induktion: Die Aussagen $A(n)$ sind wahr, wenn gilt:

1. $A(1)$ ist wahr — Induktionsanfang
2. $\forall n \in \mathbb{N}\; A(n) \Rightarrow A(n+1)$ — Induktionsschritt

Bem: Ein verwandtes Prinzip ist die rekursive Definition, welches wir an Beispielen erläutern.

Bsp: 1. Endliche Summen: $m, n \in \mathbb{Z}$, $a: \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$

$$\sum_{k=m}^{n+1} a(k) := \begin{cases} 0 & \text{für } n+1 < m \\ a(n+1) + \sum_{k=m}^{n} a(k) & \text{für } n+1 \geq m \end{cases}$$

Bsp: 2. Endliches Produkt

$$\prod_{k=m}^{n+1} a(k) := \begin{cases} 1 & \text{für } n+1 < m \\ a(n+1) \prod_{k=m}^{n} a(k) & \text{für } n+1 \geq m \end{cases}$$

Fakultät: $$n! = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0 \\ n(n-1)! & \text{für } n > 0 \end{cases}$$

Bsp 3: Potenzen: $x \in \mathbb{C}$ mit $n \in \mathbb{N}_0$:

$$x^n = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0 \\ x \cdot x^{n-1} & \text{für } n > 0 \end{cases}$$

Bsp zur vollst. Induktion

Bsp: Arithmetische Summe:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad n \in \mathbb{N} \qquad \text{Aussage } A(n)$$

Beweis: Ind. anfang: $A(1)$ ist wahr da $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$.

Ind. schritt: $A(n) \Rightarrow A(n+1)$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = (n+1) + \sum_{k=1}^{n} k \overset{A(n)}{=} n+1+\frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \qquad \square$$

Bsp Geometrische Summe $\quad x \neq 1$

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

Bew: Übungsaufgabe. $\square$

Bsp: Binomialkoeffizienten $\quad n,k \in \mathbb{N}_0$

Die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge ist gegeben durch:

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-k)!\,k!} & 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Bew: Tretter, Satz 2.15 $\square$.