PROF. DR. M. WOLF
D. LERCHER
O. SZEHR

Höhere Mathematik II für Physiker

Analysis 1

WS 11/12
Blatt 10
(23. Dezember 2011)

Hausaufgaben

Aufgabe 1. Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

$$a)\int(\sin t)^2 e^{-t}dt \qquad b)\int\frac{t^3}{\sqrt{t^2+1}}dt \qquad (t^2+1:=u)$$

$$c)\int\frac{dt}{1+\cos t} \qquad (\tan\frac{t}{2}:=u) \qquad d)\int\frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{t}-t}dt \qquad (t:=(\sin u)^2)$$

$$e)\int\sinh t\cos t dt \qquad e)\int\frac{1}{\sqrt{1+\exp t}}dt.$$

Aufgabe 2. Berechnen Sie den Grenzwert:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right).$$

Aufgabe 3. Es sei

$$f(t)=\begin{cases}\frac{1}{t}-\lfloor\frac{1}{t}\rfloor, & \text{wenn } 0<t\le 1\\ 0, & \text{wenn } t=0.\end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f über $[0,1]$ integrierbar ist und drücken Sie den Wert des Integrals mit Hilfe der *Euler-Mascheroni-Konstanten*, die definiert durch

$$C:=\lim n\to\infty\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}-\log n\right)$$

ist, aus.

Aufgabe 4. Beweisen Sie ohne Rückgriff auf den Hauptsatz der Infinitesimalrechnung die Gleichung:

$$\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=\arctan x \qquad (x>0).$$

Anleitung: Setze $\alpha=\arctan x$ und betrachte Teilungen

$$T_n: \qquad t_k:=\tan\frac{k\alpha}{n} \quad (0\le k\le n).$$

Bei geeigneter Wahl der Messpunkte lassen sich die Zahlen

$$R_n:=\sum_{k=1}^{n}\frac{t_k-t_{k-1}}{1+t_kt_{k-1}}$$

als Riemannsche Summe zu dem angeschriebenen Integral auffassen.

Aufgabe 5. Zeigen Sie: Die Funktion

$$f(x) := \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt \qquad (x \in \mathbb{R})$$

nimmt auf $\mathbb{R}$ ein globales Maximum M und ein globales Minimum $-M$ an. Finden Sie einen Ausdruck für M und beweisen Sie, dass $M < 2$.
Hinweis: Beweisen Sie unter geeigneten Voraussetzungen die Ungleichung $\sin t < t \cos \frac{t}{2}$.

Aufgabe 6. Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{n \to \infty} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin nt}{nt} dt \right).$$

Hinweis: Wähle ein $\varepsilon > 0$ und zerlege den Integrationsbereich in die Teilintervalle $[0, \varepsilon]$ und $[\varepsilon, \frac{\pi}{2}]$.