TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Zentrum Mathematik

PROF. DR. M. WOLF
D. LERCHER
O. SZEHR

Höhere Mathematik II für Physiker

Analysis 1

WS 11/12
Blatt 9
(16. Dezember 2011)

Hausaufgaben

Aufgabe 1. Punktweise und gleichmäßige Konvergenz

Untersuchen Sie in den folgenden vier Fällen die Funktionenfolge (f_n) auf der jeweils angegebenen Menge hinsichtlich ihres Konvergenzverhaltens. Bestimmen Sie dazu jeweils die punktweise definierte Grenzfunktion f von (f_n). Konvergiert (f_n) gleichmäßig gegen f?

$$a) \quad \sqrt{\frac{1}{n}+x^2} \text{ auf } \mathbb{R} \qquad\qquad b) \quad \sqrt[n]{x} \text{ auf } (0,\infty)$$

$$c) \quad \frac{1}{1+n|x|} \text{ auf } \mathbb{R} \qquad\qquad d) \quad \frac{x}{n}\mathrm{e}^{-\frac{x}{n}} \text{ auf } \mathbb{R}$$

Aufgabe 2. Zwischenwertsatz

Sei $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $\phi(0) = \phi(1)$. Ferner sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Zeigen Sie, dass es dann einen Punkt x_n im Intervall $[0,1]$ gibt mit $\phi(x_n) = \phi(x_n + \frac{1}{n})$.

Aufgabe 3. Gleichmäßige Stetigkeit und stetige Fortsetzbarkeit

(a) Sei f eine stetige komplexe Funktion auf dem beschränkten Intervall (a,b). Zeigen Sie, dass f genau dann eine stetige Fortsetzung $F : [a,b] \to \mathbb{C}$ besitzt, wenn f auf (a,b) gleichmäßig stetig ist.

(b) Sei nun die Funktion $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \inf\{|nx-1| | n \in \mathbb{N}\}\,.$$

Skizzieren Sie den Graphen von f (zumindest für $0.2 \le x < 1$) und zeigen Sie, dass f auf dem Intervall $(0,1)$ stetig ist. Verwenden Sie (a) um zu zeigen, dass f dort auch gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 4. Grenzwerte

Betrachten Sie die folgenden Funktionen als Funktionen auf geeigneten Teilmengen von $\mathbb{R}$. Berechnen Sie für $a,\ b > 0$, $\alpha\beta \neq 0$ und $s \neq 0$ die folgenden Grenzwerte:

$$a) \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t}, \qquad b) \lim_{t\to 0} \frac{\mathrm{e}^t - 1}{t}, \qquad c) \lim_{t\to 0} \frac{(1+t)^s}{st}$$

$$d) \lim_{t\to 0} \frac{\sin(\sqrt{1+t}-1)}{t}, \qquad e) \lim_{t\to 0} \frac{a^t-1}{b^t-1}, \qquad f) \lim_{t\to 1} \frac{t^\alpha - t^\beta}{t^{1/\beta}-t^{1/\alpha}}$$

$$g) \lim_{t\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin t + \sin(3t)}{\cos(2t)}, \qquad h) \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos t}}{t}, \qquad i) \lim_{t\to 0} (1+2\sin t)^{\cot t}\,.$$

Aufgabe 5. Ableiten
Leiten Sie die folgenden Ausdrücke nach t ab:

$a)$ $\ln\dfrac{1+\sqrt{1-t^2}}{t}$,

$b)$ $\sqrt{\dfrac{\alpha+\beta t}{\alpha-\beta t}}$,

$c)$ $\sinh t$,

$d)$ $\cosh t$,

$e)$ t^{t^t},

$f)$ $\operatorname{arcsinh} t$.

Aufgabe 6. Ableitungsregel von Leibniz

(a) Beweisen Sie für n-mal differenzierbare Funktionen f und g die Leibnizregel

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

(b) Berechnen Sie die Ableitung $(x^3 \mathrm{e}^{2x})^{(2011)}$. (Nach Neujahr muss einmal zusätzlich differenziert werden.)

Aufgabe 7. Differenzierbarkeit und mehr
Sei

$$f(t) := \begin{cases} t + 2t^2 \sin\frac{1}{t}, & t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\,, \\ 0 & t = 0\,. \end{cases}$$

Verifizieren Sie die folgenden Eigenschaften:

(a) f ist differenzierbar,

(b) f' ist auf $(-1,1)$ beschränkt,

(c) $f'(0) = 1$ und

(d) f ist auf keinem Intervall $(-\epsilon,\epsilon)$, $\epsilon > 0$, monoton wachsend.

Aufgabe 8. Konvexität und Monotonie

(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion und $x_0 < x_1$. Leiten Sie für $x \notin (x_0, x_1)$ die folgende Ungleichung her:

$$f(x) \geq \frac{x_1 f(x_0) - x_0 f(x_1)}{x_1 - x_0} + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} x\,.$$

(b) Folgern Sie daraus, dass jede beschränkte, konvexe Funktion $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ monoton fallend ist.

Eine mögliche Abgabe und die Nachbesprechung erfolgen in den Tutorübungen in der Woche vom 9. bis zum 13. Jänner.
Alle Aufgaben auf diesem Blatt sind zum Vorlösen an der Tafel geeignet.
