TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Zentrum Mathematik

PROF. DR. M. WOLF
D. LERCHER
O. SZEHR

Höhere Mathematik II für Physiker

Analysis 1

WS 11/12
Blatt 4
(11. November 2011)

Hausaufgaben

Aufgabe 1. Komplexe Zahlen
Es sei $c := a + ib$ eine komplexe Zahl mit $a,\ b \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie Real- und Imaginrteil der beiden Lösungen der Gleichung $z^2 = c$.

Aufgabe 2. Komplexe Ebene
Durch $z \mapsto w := \frac{1}{z}$ wird die *punktierte* Ebene $\dot{\mathbb{C}} := \mathbb{C}\backslash\{0\}$ in die w-Ebene abgebildet. Man zeichne die Bilder

1. der reellen, punktierten Achse $\{z \in \dot{\mathbb{C}} \mid \Im z = 0\}$,
2. der imaginren, punktierten Achse $\{z \in \dot{\mathbb{C}} \mid \Re z = 0\}$,
3. eines Kreises $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}$,
4. der Geraden $\{z \in \mathbb{C} \mid \Re z = 1\}$.

Aufgabe 3. Fibonacci Folge
Die Fibonacci Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist definiert mittels

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= 1 \\ a_n &= a_{n-1} + a_{n-2} \qquad n \geq 3 \end{aligned}$$

Zeige, dass für alle $n \geq 1$ gilt:

$$a_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

Finden Sie ferner ein $n \in \mathbb{N}$, sodass für alle $m \geq n$ gilt:

$$\left| \frac{a_{m+1}}{a_m} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right| \leq 0.01.$$

Aufgabe 4. Kettenbruch
Zeige, dass $\sqrt{2}$ die Kettenbruchdarstellung besitzt:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\ldots}}}.$$

Aufgabe 5. Limes Superior
Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkte, reelle Zahlenfolgen. Zeigen Sie, dass im Allgemeinen *nicht* gilt:

$$\limsup x_n + \limsup y_n = \limsup x_n + y_n.$$

Aufgabe 6. Häufungspunkte

Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der komplexen Zahlenfolge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$z_n := \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n.$$

Aufgabe 7. Gruppen

Rufen Sie sich die Definition einer Gruppe (G, γ) aus der Vorlesung in Erinnerung. Aus den gegebenen Axiomen lassen sich die folgenden 7 Aussagen ableiten. $4.$ wurde in der Zentralübung bewiesen. Leiten Sie daraus, und aus den Gruppenaxiomen, zuerst $1. - 3.$ und anschließend $5. - 7.$ ab.

1. Das Neutrale e ist eindeutig.
2. $ae = ea \qquad \forall a \in \mathcal{G}$ und für jedes Neutrale e.
3. Das zu a Inverse a^{-1} ist eindeutig.
4. $aa^{-1} = a^{-1}a \qquad \forall a \in \mathcal{G}$ und für ein beliebiges zu a Inverses a^{-1}.
5. $(a^{-1})^{-1} = a \qquad \forall a \in \mathcal{G}$
6. $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} \qquad \forall a, b \in \mathcal{G}$
7. $x = y \;\Leftrightarrow\; ax = ay \;\Leftrightarrow\; xa = ya \qquad \forall a, x, y \in \mathcal{G}$