TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

PROF. DR. M. WOLF
D. LERCHER
O. SZEHR

Höhere Mathematik II für Physiker

Analysis 1

WS 11/12
Blatt 1
(21. Oktober 2011)

Hausaufgaben

Aufgabe 1. Dracula
In der Bibliothek des Grafen Dracula gibt es keine zwei Bücher, deren Inhalt aus gleich vielen Worten besteht. Die Anzahl der Bücher ist grösser als die Summe der Anzahl der Wörter jedes einzelnen Buches. Diese Aussagen genügen, um den Inhalt mindestens eines Buches aus Draculas Bibliothek genau zu beschreiben. Was steht in dem Buch?

Aufgabe 2. Furchteinflößende Gestalt
Von den drei folgenden Aussagen über eine andere furchteinflößende Gestalt (*fG*) ist genau eine richtig:

i *fG* hat mehr als tausend Bücher.

ii *fG* hat weniger als tausend Bücher.

iii *fG* hat mindestens ein Buch.

Wieviele Bücher hat *fG*?

Aufgabe 3. Äquivalenz logischer Aussagen
Zeigen Sie, dass folgende Aussagen wahr sind, unabhängig vom Wert der Variablen A und B:

(a) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$

(b) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$

(c) $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$

Untersuchen sie anschließend die Wahrheitstafel der Implikation $A \Rightarrow B$ für die beiden Aussagenpaare $A : x > 1, B : x > 0$ für $x \in \mathbb{R}$ und $A : 2|x, B : 3|x$ für $x \in \mathbb{N}$. Warum gilt die Implikation im einen Fall als richtig, jedoch nicht im anderen, wo doch die Wahrheitstafel in beiden Fällen 'wahr' und 'falsch' als Einträge besitzt?
Hinweis: $a|b$ bedeutet, dass a Teiler von b ist.

Aufgabe 4. Quantoren
Seien $X = \{x_1, x_2\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$ und $Z = \{z_1, z_2\}$ drei Mengen mit jeweils zwei Elementen.

(a) Fomulieren Sie eine zur Aussage

$$\forall x \in X \, \exists y \in Y \, \forall z \in Z : A(x, y, z)$$

äquivalente Aussage ohne Verwendung der Quantoren $\forall$ und $\exists$.

(b) Leiten sie daraus die Negation der gegebenen Aussage ab.

(c) Drücken Sie diese anschließend wiederum mit Hilfe der Quantoren $\forall$ und $\exists$ aus.

Bitte beachten Sie auch die **Aufgaben auf der Rückseite.**

Aufgabe 5. Übersetzen von Aussagen
Seien $a, b, c, x, y \in \mathbb{N}_0$. Was ist die Bedeutung der folgenden Aussagen, ausgedrückt in Worten:

(a) $\forall a \, \exists b \, \forall x, y : b > a \wedge (x, y > 1 \Rightarrow xy \neq b)$

(b) $\forall a \, \exists b \, \forall x, y : b > a \wedge (x, y > 1 \Rightarrow xy \neq b \wedge xy \neq b + 2)$

(c) $\forall a \, \exists b, c, x, y : a = b^2 + c^2 + x^2 + y^2$

Formulieren Sie Fermats letzten Satz und die starke Goldbachsche Vermutung auf ähnliche Art und Weise. Beide können beispielsweise in der Wikipedia nachgeschlagen werden.

Aufgabe 6. Naive Mengenlehre
In dieser Aufgabe werden wir feststellen, dass eine naive Mengenlehre, welche unbeschränkte Mengenbildung erlaubt, zu Widersprüchen führt. Wir werden anhand eines Beispieles zeigen, dass nicht jede vorstellbare Zusammenstellung von Elementen eine Menge bildet:
Beweisen Sie den folgenden Satz mittels Widerspruchsargument:

Es gibt keine Menge S für die gilt: $x \in S$ genau dann wenn $x \notin x$.

Aufgabe 7. ’ne Menge Mengen
Malen Sie in den Teilaufgaben (b) und (c) ein aussagekräftiges Venn Diagramm für die Mengen $M, N \subseteq A$ und erraten Sie jeweils eine Beschreibung der Menge, die keine Klammern enthält. Zeigen Sie anschließend rigoros die jeweilige Gleichheit der Ausdrücke. Zunächst jedoch:

(a) Beweisen Sie die Eindeutigkeit der leeren Menge $\emptyset$.

(b) $(M \cap N)^c$

(c) $(M \setminus N)^c$

Eine mögliche Abgabe und die Nachbesprechung erfolgen in den Tutorübungen in der Woche vom 31. Oktober bis zum 04. November.
Alle Aufgaben auf diesem Blatt sind zum Vorlösen an der Tafel geeignet.
