III.6. Potenzreihen

Def.: ∘ Eine Reihe $P(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit Koeffizienten $a_n \in \mathbb{C}$ und einer Variablen $z \in \mathbb{C}$, heißt „Potenzreihe".

∘ $R := \sup\{ |z| \mid z \in \mathbb{C} \wedge P(z) \text{ konvergiert} \} \in [0, \infty]$ heißt „Konvergenzradius" der Potenzreihe P.

Bemerkung: ∘ $P(0) = 0$

allgemeiner: Potenzreihe mit Mittelpunkt z_0: $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n a_n$

∘ $P: U_R(z_0) \to \mathbb{C}$ def. Funktion

∘ Partialsummen von P heißen „Polynome". Die Terme $a_n z^n$ „Monome".

Satz: 1) $|z| < R \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konvergiert absolut

2) $|z| > R \Rightarrow$ —"— divergiert

3) $R = \left(\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right)^{-1}$ (Cauchy-Hadamard)

4) $R = \left(\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right)^{-1}$, falls Limes existiert (Euler)

5) $R = \sup\{ r \geq 0 \mid |a_n| r^n \text{ beschränkt} \}$

Beweis: ∘ Wurzelkriterium: $P(z)$ konv. absolut, wenn $\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|z^n a_n|} < 1$

$$\Rightarrow R \geq \left(\limsup \sqrt[n]{|a_n|} \right)^{-1}$$

$P(z)$ divergiert, wenn $\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|z^n a_n|} > 1$

$$\Rightarrow R < \left(\limsup \sqrt[n]{|a_n|} \right)^{-1}$$

dies zeigt 3) und auch 1) und 2)

∘ Quotientenkriterium: $P(z)$ konv. absolut, wenn $\limsup \left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| < 1$

$P(z)$ divergiert, wenn $\liminf$ —"— > 1

Wenn $\lim$ existiert, ist $\liminf = \limsup = \lim \Rightarrow 4)$

∘ zu 5): $|a_n| r^n$ unbeschränkt $\Rightarrow r \geq R$, da die Reihe nicht absolut konv.

$|a_n| r^n < C \Rightarrow R^{-1} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \leq r^{-1} \limsup \sqrt[n]{C} = r^{-1}$

$\Rightarrow R \geq r$ □

Bsp.: 1) Geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$

$\limsup \sqrt[n]{a_n} = \lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$, da $a_n = 1 \Rightarrow R = 1$

2) $P(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$

$\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim \left| \frac{n}{n+1} \right| = 1 \Rightarrow R = 1$

konvergiert nicht für $z = 1$ (Harmonische Reihe)

konvergiert für alle $z \neq 1$ mit $|z| \leq 1$ (z.B. $z = -1$ wg. Leibniz-Krit.)

Korollar: Für jedes $m \in \mathbb{N}$ haben die Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+m} z^n$ den selben Konvergenzradius.

Beweis: für jedes $r \geq 0$ ist $|a_n| r^n$ genau dann beschränkt, wenn $|a_{m+n}| r^n$ dies ist. □

Satz: (Koeffizientenvergleich)

Gegeben Potenzreihen $P(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $P'(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n' z^n$ mit Konvergenzradien $R, R' \in (0, \infty]$ und $\delta := \min\{R, R'\}$. Wenn es eine Nullfolge (z_n) gibt und $\forall n \in \mathbb{N}: 0 < |z_n| < \delta \wedge P(z_n) = P'(z_n)$, dann ist $a_n = a_n'$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Insbesondere $R = R'$.

Beweis: $c_n := a_n - a_n'$, $m := \inf\{ n \in \mathbb{N}_0 \mid c_n \neq 0 \}$

$$c_m z_n^m = -\sum_{j=m+1}^{\infty} c_j z_n^j$$

$$\Rightarrow |c_m| |z_n|^m \leq \left| \sum_{j=m+1}^{\infty} c_j z_n^j \right| \leq |z_n|^{m+1} \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} |c_{j+m+1}| |z_n|^j}_{=: C < \infty}$$

$$\overset{z_n \neq 0}{\Rightarrow} |c_m| \leq C |z_n| \to 0$$

($C < \infty$: Korollar) □

Korollar: (Cauchy-Produkt für Potenzreihen)

Wenn $P(z)$, $P'(z)$ Konvergenzradien R, R' haben, dann gilt für alle $z \in \mathbb{C}$

$|z| < \min\{R, R'\} \Rightarrow P(z) P'(z) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l z^l$ mit $c_l := \sum_{m=0}^{l} a_{l-m} a_m'$.

Beweis: Anwendung des Cauchy-Produkts □

IV. Die Exponentialfunktion & ihre Verwandten

IV.1. Die Exp. funktion

Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ hat Konvergenzradius $R = \infty$.

Beweis: Quotientenkriterium: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{1}{n+1}\right| \to 0$.

„Eulersche Zahl"

Def: „Exponentialfunktion" $\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} =: e^z$. $\quad e := e^1 = 2{,}71\ldots$

Satz: (Funktionalgleichung)

$$z, w \in \mathbb{C} \Rightarrow \boxed{\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)}$$

Beweis:

$$\text{r.S.} = \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{z^n w^m}{n!\,m!} \overset{\uparrow}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{n} \frac{z^{n-l} w^l}{(n-l)!\,l!}$$

Cauchy-Produkt

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \underbrace{\sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} z^{n-l} w^l}_{(z+w)^n} = \exp(z+w)$$

□

Bemerkung: Nur exp erfüllt 1) $f(z+w) = f(z) f(w)$

zusammen mit 2) $\lim_{z \to 0} \frac{f(z)-1}{z} = 1$

Satz: Für jede Folge $(z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ gilt:

$$(z_n \to z) \Rightarrow \left(\left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n \to \exp(z) \right)$$

Beweis: siehe Zentralübung

Lemma: $\forall N \in \mathbb{N}: \quad 0 < e - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} < \frac{1}{N!\,N}$

Beweis:

$$e - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} = \frac{1}{(N+1)!} + \frac{1}{(N+2)!} + \frac{1}{(N+3)!} + \ldots$$

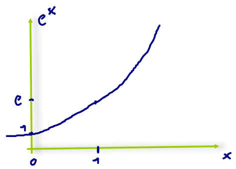
$$< \frac{1}{(N+1)!} \left(1 + \frac{1}{N+1} + \frac{1}{(N+1)^2} + \ldots\right) = \frac{1}{N!\,N}$$

Satz: e ist irrational

Beweis: $e = p/N \Rightarrow 0 < \underbrace{N!(e - s_N)}_{\text{ganzzahlig}} < \frac{1}{N}$ mit $s_N := \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}$

$p, N \in \mathbb{N}$ $\qquad$ ganzzahlig $\in (0,1)$ ↯ □

Exponentialfunktion für reelle Argumente:



- $e^{\alpha x}$ ist monoton $\begin{cases} \text{wachsend} \\ \text{fallend} \end{cases}$ für $\begin{cases} \alpha > 0 \\ \alpha < 0 \end{cases}$
- $\lim_{x \to \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

IV.2. Trigonometrische Funktionen

Def.: „Kosinus" $\cos: \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$

„Sinus" $\sin: \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$

Für beide gilt $R = \infty$, was z.B. folgt aus:

$$\boxed{\cos(z) = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right), \quad \sin(z) = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)}$$

Hieraus folgt auch die „Eulersche Formel"

$$\boxed{e^{iz} = \cos z + i \sin z}$$

und die Identität $\boxed{(\cos z)^2 + (\sin z)^2 = 1}$

Aus der Eulerschen Formel folgt wiederum für $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$:

$$\boxed{(\cos z + i \sin z)^n = \cos(nz) + i \sin(nz)}$$ „Moivresche Formel"

Satz: (Additionstheoreme) Für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt

$$\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w,$$

$$\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w.$$

Beweis:

$$e^{i(z+w)} = e^{iz} e^{iw} = (\cos z + i \sin z)(\cos w + i \sin w)$$

$$= \cos z \cos w - \sin z \sin w + i(\sin z \cos w + \cos z \sin w)$$

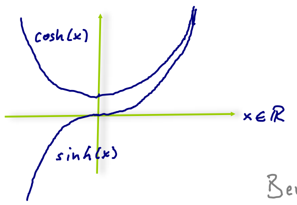
$$e^{-i(z+w)} = \ldots$$

aus Addition/Subtraktion der Gleichungen folgen die Additionstheoreme □

Imaginäre & reelle Argumente

<u>Def.:</u> „Kosinus Hyperbolicus“ $\cosh(x) := \cos(ix) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

„Sinus –"– “ $\sinh(x) := -i\sin(ix) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$



$$\boxed{(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1}$$

Bemerkung: ∘ $\cosh(x)$ ist „Kettenlinie“ (d.h. die Form, die eine durchhängende Kette annimmt)

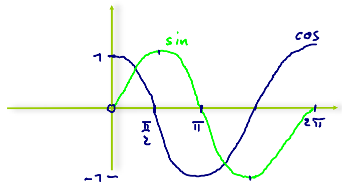
∘ „Lorentz boost“ in SRT in x-Richtung

$$\begin{pmatrix} \cosh\lambda & -\sinh\lambda & \cdot & \cdot \\ -\sinh\lambda & \cosh\lambda & \cdot & \cdot \\ \vdots & \vdots & 1 & \cdot \\ & & \cdot & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{c+v}{c-v}\right)$$

für $x \in \mathbb{R}$:

$\cos(x + 2\pi) = \cos x$

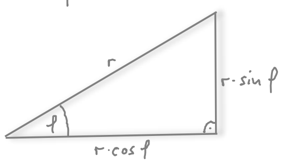
$\sin(x + 2\pi) = \sin x$



Def. von π: „kleinste Nullstelle des Kosinus auf $\mathbb{R}_+$ ist $\frac{\pi}{2}$.“

$\pi = 3{,}1415\ldots$ irrational

Geometrische Interpretation:



, $\varphi \in [0, 2\pi)$

2π-Periodizität ist gleichbedeutend mit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z}: \ e^{i2\pi n} = 1}$$

<u>Def.:</u> ∘ „Tangens“ $\tan: \mathbb{C} \setminus \{\frac{(2\mathbb{Z}+1)}{2}\pi\} \to \mathbb{C}$, $\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$

∘ „Kotangens“ $\cot: \mathbb{C} \setminus \{\pi\mathbb{Z}\} \to \mathbb{C}$, $\cot(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)}$

IV.3. Der komplexe Logarithmus

$\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ ist bijektiv → es gibt eine Umkehrfunktion („Logarithmusfunkt.“)

$\ln: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, so daß für $x \in \mathbb{R}_+$, $y \in \mathbb{R}$:

$$\exp(\ln x) = x, \quad \ln(\exp(y)) = y.$$

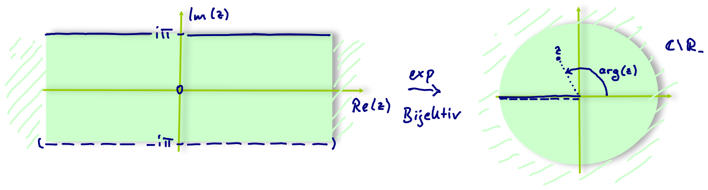
Funktionalgleichung: $x, y > 0 \Rightarrow \boxed{\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)}$

folgt z.B. aus $e^{\ln(xy)} = xy$

$e^{\ln(x)+\ln(y)} = e^{\ln(x)} e^{\ln(y)} = xy$.

daraus folgt: $q \in \mathbb{Q}, x > 0 \Rightarrow \boxed{\ln(x^q) = q\ln(x)}$

Für Def. über $\mathbb{C}$ betrachte exp in komplexer Zahlenebene:



Polardarstellung: $z = |z| \exp(i\arg(z))$

$= \exp(\ln|z| + i\arg(z))$, $\arg(z) \in (-\pi, \pi]$

<u>Def.:</u> (Hauptzweig des Logarithmus)

$$\log: \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) \in (-\pi, \pi]\}$$

$$z \mapsto \ln(z) := \ln|z| + i\arg(z)$$

<u>Def.:</u> (Allgemeine Potenzfunktion)

Für $a \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$z^a := \exp(a \ln z)$$

z.B.: $i^{-i} = e^{-i\ln i} = e^{-i \cdot i\frac{\pi}{2}} = e^{\frac{\pi}{2}}$.

Potenzreihe für ln?

$\ln(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ klappt nicht da $\ln(0) \neq 0$

<u>Satz:</u> Für $|z| < 1$ gilt: $\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$

Beweis: später ...