XI. Lineare, gewöhnliche Differentialgleichungen

DGL in der Physik:

- Newton'sche Bwgl. → kl. Mechanik
- Maxwell'sche Gl. → E-Dynamik
- Schrödinger Gl. → Quantentheorie
- Liouville Gl. → Stat. Physik
- Einstein'sche Feldgl. → ART

etc.

Bsp.: $m\ddot{x}(t) = F(x(t), \dot{x}(t), t)$

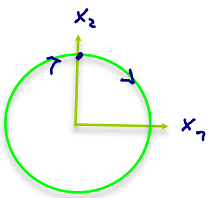
gesucht: $\mathbb{R} \ni t \mapsto x(t) \in \mathbb{R}^3$

Im Folgenden sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

Def.:
- Eine stetige Abbildung $x: [t_1, t_2] \to \mathbb{K}^n$, $t \mapsto x(t)$ mit $t_2 > t_1 \in \mathbb{R}$ heißt „Kurve" im $\mathbb{K}^n$. t heißt „Parameter" und $x([t_1,t_2])$ „Spur".
- x heißt m-mal stetig diff.bar, falls dies für alle Komponenten $x_k(t)$ gilt. $k = 1, \dots, n$

Die m-te Ableitung ist dann
$$x^{(m)}: t \mapsto \begin{pmatrix} x_1^{(m)}(t) \\ \vdots \\ x_n^{(m)}(t) \end{pmatrix}$$

Bsp.:
- $x(t) = \begin{pmatrix} \sin(2\pi\omega t) \\ \cos(2\pi\omega t) \end{pmatrix}$



$x(t) = x(t + \frac{1}{\omega})$

- $\dot{x}(t) = \frac{d}{dt} x(t)$ ist „Geschwindigkeit" / Tangente

Def.: Eine „gewöhnliche DGL k-ter Ordnung" ist von der Form

$$\boxed{x^{(k)}(t) = F\left(x^{(k-1)}(t), \dots, x^{(1)}(t), x(t), t\right) \quad \forall t \in I} \quad (1)$$

Eine k-mal diff.bare Kurve $x: \tilde{I} \to \mathbb{K}^n$ mit $\tilde{I} \subseteq I$ heißt „Lösung", wenn (1) gilt.

Falls $n > 1$ spricht man von einem „System" von DGLen.

Bemerkung: „gewöhnlich" bedeutet hier, dass nur nach einer Variablen diff. wird.

(sonst „partiell" → 2. Sem.)

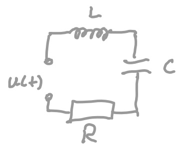
Bsp.:

- Newton'sche Bewegungsgl. (= Sys. von DGL 2ter Ordnung)

$$x^{(2)}(t) = \frac{1}{m} \underbrace{F\left(x^{(1)}(t), x(t), t\right)}_{\text{Kraft abh. von Zeit } (t),\ \text{Ort } (x) \text{ u. Geschw. } (x')} , \quad x(t) \in \mathbb{R}^3$$

$x^{(2)}$: Beschleunigung

- RCL-Schwingkreis (DGL 2ter Ordnung)



$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C} I = \dot{u}(t)$$

L: Induktivität, R: Widerst., C: Kapazität

- Zerfalls-/Wachstumsprozesse (DGL 1ter Ordnung)

$$\dot{n}(t) = F(n(t))$$

n: Population/Teilchenzahl

wir behandeln erstmal den „linearen" Fall:

- Ein Sys. von DGLen erster Ordnung für $x: I \to \mathbb{C}^m$ heißt „linear", wenn

(1) $$\boxed{\dot{x}(t) = A(t)\, x(t) + b(t)}, \quad \text{mit } t \mapsto A(t) \in M_m(\mathbb{C}), \quad t \mapsto b(t) \in \mathbb{C}^m .$$

Wenn zudem $b(t) = 0 \ \forall t \in I$, spricht man von einer „homogenen" linearen DGL.
(sonst „inhomogen")

- Eine DGL n-ter Ordnung für $x: I \to \mathbb{C}$ heißt „linear", wenn

(2) $$\boxed{\sum_{k=0}^{n} a_k(t)\, x^{(k)}(t) = c(t)}, \quad \text{mit } t \mapsto a_k(t) \in \mathbb{C}, \ t \mapsto c(t) \in \mathbb{C} .$$

- Ist $A(t)$ bzw. alle $a_k(t)$ von t unabh., spricht man von „konstanten Koeffizienten".

Satz: Betrachte (2) mit $a_n = 1$ und

(1) mit

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & 1 & & \vdots \\ & & 0 & \ddots & 0 \\ & & & & 1 \\ -a_0(t) & \cdots & & -a_{n-2}(t) & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c(t) \end{pmatrix} .$$

(i) $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ Lösung von (1) $\Rightarrow$ x_1 Lösung von (2)

(ii) x_1 Lösung von (2) $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1^{(1)} \\ \vdots \\ x_1^{(n-1)} \end{pmatrix}$ Lösung von (1) .

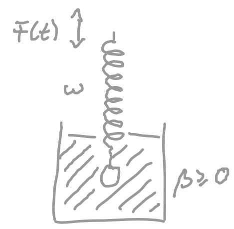
Beweis: (i) $\dot{x}(t) = A(t)\,x(t) + b(t)$

$$\Longleftrightarrow \quad \left.\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t) \end{aligned}\right\} \quad x_k(t) = x_1^{(k-1)}(t)$$

$$\vdots$$

$$\underbrace{\dot{x}_n(t)}_{= x^{(n)}(t)} = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)\, x_{k+1}(t) + c(t)$$

(ii) Einsetzen analog zu (i) ... $\square$



Bsp.: Getriebener, gedämpfter harmonischer Oszillator:

$$\ddot{x}(t) + 2\beta\,\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = F(t)$$

equivalent zu

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{v}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\beta \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix}}_{\text{Punkt im „Phasenraum"}} + \begin{pmatrix} 0 \\ F(t) \end{pmatrix}$$

Bemerkung: Wird eine Lösung zu ① oder ② gesucht, die zu einer „Zeit" t_0 vorgegebene Werte $x(t_0) \overset{①}{=} x_0$ bzw. $x^{(k)}(t_0) \overset{②}{=} x_{0,k}$ für $k \in \{0, \dots, n-1\}$ annimmt, spricht man von einem Anfangswertproblem (AWP).

XI.1. Homogene lineare DGL mit konstanten Koeffizienten

Satz: Wenn $A \in M_n(\mathbb{K})$, $x_0 \in \mathbb{K}^n$, dann ist $x : \mathbb{R} \to \mathbb{K}^n$, $\boxed{x(t) = e^{At} x_0}$ die eindeutige Lösung des AWPs $\boxed{x' = Ax, \; x(0) = x_0}$.

Beweis: $\frac{d}{dt} e^{tA} x_0 = A e^{tA} x_0$ und $e^{At} x_0 = x_0$ für $t = 0$.

Damit ist $e^{tA} x_0$ eine Lösung.

Sei $\tilde{x}(t)$ neben $x(t)$ eine weitere Lösung. Dann gilt

$$\big(\underbrace{x(t) - \tilde{x}(t)}_{=: y(t)}\big)' = A\,y(t) \quad \text{und} \quad y(0) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-tA} y(t)\right] = e^{-tA}(-A)\,y(t) + e^{-tA} A\,y(t) = 0$$

$$\overset{\text{HDI}}{\Longrightarrow} \quad e^{-tA} y(t) = e^{-0A} y(0) = 0 \quad \forall t \quad \Rightarrow \quad y(t) = 0 \quad \forall t \qquad \square$$

Bemerkung: Analog zeigt man, dass das AWP $x' = Ax$, $x(t_0) = x_0$ $\boxed{x(t) = e^{A(t-t_0)} x_0}$ als eindeutige Lösung hat.

Satz: Sei $\mathcal{L}$ die Menge der Lösungen von $x' = Ax$, $A \in M_n(\mathbb{K})$.
$\mathcal{L}$ ist ein n-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K}$ und alle Spalten der Matrix e^{tA} bilden eine Basis von $\mathcal{L}$.

Beweis: Nach vorangehendem Satz ist $\mathcal{L} = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}^n \mid f(t) = e^{tA} x_0,\ x_0 \in \mathbb{K}^n \}$.
Offensichtlich ist $\mathcal{L}$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $f_k(t) := \underbrace{e^{tA} e_k}_{k\text{'te Spalte von } e^{tA}}$, $e_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow k\text{'te Komponente}$
$k \in \{1, \dots, n\}$ ist so dass $\operatorname{span}_{\mathbb{K}} \{f_k\} = \mathcal{L}$.
Damit ist $\dim(\mathcal{L}) \leq n$.
Da e^{tA} invertierbar ist für alle t, sind alle Spalten lin. unabh. und damit $\dim(\mathcal{L}) = n$. □

Bemerkung: Man nennt $\mathcal{L}$ den „Lösungsraum" und eine Basis von $\mathcal{L}$ ein „Lösungs-Fundamentalsystem".

Lemma: Sei $N := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$. Dann gilt

$$e^{tN} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & & \frac{t^2}{2} \\ & 0 & & \ddots & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Beweis: → Lin. Alg. □

Korollar: Wenn $A \in M_n(\mathbb{C})$ Eigenwerte $\{\lambda_i \in \mathbb{C}\} =: \Lambda$ hat, deren größte Jordanblöcke Dimensionen $\{n(\lambda_i) \in \mathbb{N}\}$ besitzen, dann ist jeder Eintrag von e^{tA} Element von

$$\operatorname{span}_{\mathbb{C}} \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid \boxed{f(t) = t^m e^{\lambda t}} \wedge \lambda \in \Lambda \wedge 0 \leq m < n(\lambda) \}$$

Beweis: Jordan-Normalform: $A = X \bigoplus_j (\lambda_j \mathbb{1}_{n_j} + N_{n_j}) X^{-1}$ Nilpotent wie in vorherigem Lemma

$e^{tA} = X \bigoplus_j e^{\lambda_j t} e^{tN_j}) X^{-1}$ da $e^{t\lambda \mathbb{1} + tN} = e^{t\lambda \mathbb{1}} e^{tN}$

Aussage folgt damit aus Lemma. □