Einschub (Sonderkapitel A)

Polynome, rationale Fktn, PBZ & Integration.

A.1 Polynome.

In der Analysis ist ein Polynom eine Fktn
$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $a_n, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$

Wenn $a_n \neq 0$, so ist n der Grad des P.
Sind alle a_k Null, so heißt f Nullpolynom, ihm wird kein Grad zugeord.
$\mathbb{C}[x]$ ($\mathbb{R}[x]$) ... Menge aller Polynome mit kompl. (reellen) Koeff.

Summen & Produkte von Polynomen sind wieder Polynome.
Mit $g(x) = b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0$ gilt

$$(f \cdot g)(x) = c_{m+n} x^{m+n} + \ldots + c_0 \quad \text{mit} \quad c_k = \sum_{r+s=k} a_r b_s \quad k = 0, \ldots, m+n$$

Bemerke: $\mathbb{C}[x]$ ($\mathbb{R}[x]$) stellt einen $\mathbb{C}$-($\mathbb{R}$-) VR dar, versehen mit einer zusätzlichen bilinearen Produktstruktur. Es handelt sich also um eine $\mathbb{C}$ – ($\mathbb{R}$ –) Algebra.

Satz von der Division mit Rest.

Sei g ein Polynom $\neq 0$. Dann gibt es zu jedem Polynom f eindeutig bestimmte Polynome q und r mit
$$f = q \cdot g + r, \quad \text{wobei } r = 0 \text{ oder Grad } r < \text{Grad } g$$

Bew: • Existenz von q & r:

1. Fall: Grad g > Grad f oder $f = 0$
Es gilt dann $q = 0$ und $r = f$
2. Fall Grad $g = m = n =$ Grad f
Es gilt dann $q = \frac{a_n}{b_m}$, $r = f - \frac{a_n}{b_m} g$ mit Grad r < Grad g
3. Fall: Grad g < Grad f.
Bew. durch hinreichend langes Hinstarren.

• Eindeut. von q & r:

Es gebe eine weitere Zerlegung $f = q'g + r'$ mit $q' \neq q$. Somit folgt $(q'-q)g = r'-r$ und Grad $(q'-q)g$ = Grad $(r'-r)$. Dies steht im Widerspruch zu Grad $r <$ Grad g ∎

<u>Berechnen von q & r</u> (für geg f & g) <u>Polynomdivision</u>

$f(x) := x^4 + x^3 + 1 \qquad g(x) := 2x^2 + 6$

$$
\begin{array}{l}
(x^4 + x^3 \qquad + 1) : (2x^2 + 6) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \\
\underline{x^4 \qquad 3x^2} \\
\quad x^3 - 3x^2 \quad + 1 \\
\quad \underline{x^3 \qquad 3x} \\
\qquad -3x^2 - 3x + 1 \\
\qquad \underline{-3x^2 \qquad -9} \\
\qquad\quad -3x + 10
\end{array}
$$

dh $\underbrace{x^4 + x^3 + 1}_{f(x)} = \underbrace{(2x^2+6)}_{g(x)} \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{3}{2}\right)}_{q(x)} \underbrace{-3x + 10}_{r(x)}$

Ist $r = 0$ (dh $f = qg$) so heißt g Teiler von f.

<u>Bemerke:</u> $f(\alpha) = 0$ für $\alpha \in \mathbb{C}$ (α ist Nullst.* von f) $\Longleftrightarrow$ $(x - \alpha)$ ist Teiler von f

Ist f nicht das Nullpolynom und $f(\alpha) = 0$ so gibt es also ein q mit Grad q = Grad $f - 1$ sd. $f(x) = (x-\alpha)q(x)$.

<u>Folgerung</u>: Ein Polynom $f \neq 0$ hat höchstens Grad f Nullstellen

<u>Folgerung</u> (<u>Identitätssatz</u>): Stimmen die Werte zweier Polynome

$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$,

$g(x) = b_n x^n + \ldots + b_1 x + b_0$

an $n+1$ versch. Stellen überein, so gilt $a_k = b_k$, $k = 0, .., n$.
(denn Grad $(f - g) \leq n$, aber $(f - g)$ hat $n+1$ versch. Nst somit $f - g \equiv 0$)

* ist $(x-\alpha)^k$ Teiler von f, nicht jedoch $(x-\alpha)^{k+1}$: α Nst k-ter Ordn.

Bemerke: Auf dem Id'satz beruht die nützliche Methode des Koeffizientenvergleiches: Hat man für ein Poly. zwei Darstellungen, so sind einander entsprechende Koeffizienten gleich.

Satz (Linearfaktorzerlegung)
Jedes nicht konst. Polynom $f \in \mathbb{C}[z]$ besitzt eine Darstellung
$$f(z) = a\,(z-\alpha_1)^{k_1} \cdots (z-\alpha_s)^{k_s}$$

Bemerke Reelle Polynome besitzen i.A. keine reelle Linearfaktorzerlegung. Aber zu jeder komplexen Nst α ist auch $\bar{\alpha}$ Nst $\left(\text{da } f(\bar{\alpha}) = \sum a_k \bar{\alpha}^k = \overline{\sum a_k \alpha^k} = \overline{f(\alpha)} = 0\right)$
Man kann nun konjugierte Linearfaktoren zusammenmultiplizieren: $(x-\alpha)(x-\bar{\alpha}) = x^2 - 2\,\mathrm{Re}(\alpha)\,x + |\alpha|^2$. Somit folgt.

Korollar (Zerleg. reeller Polynome)
Jedes reelle Polynom kann als Produkt reeller Polynome mit Graden ≤ 2 dargestellt werden.

A.2 Rationale Funktionen

$R : \mathbb{C}\setminus A \to \mathbb{C}$, (wobei A höchstens endl. ist) heißt ratio. Fktn, falls $R(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$ für Polynome f & g.

Es entstehe durch Kürzen der gemeins. Teilerpolynome die Darst. $R(z) = \frac{F(z)}{G(z)}$

$D := \{ z \in \mathbb{C} \mid G(z) \neq 0 \}$ heißt vollst. Def'bereich von R.

Überlege: In einer Darst. $R = \frac{F}{G}$ mit F & G teilerfremd sind F & G bis auf konst. Faktoren eindeutig bestimmt.

Gibt es eine Darst. $R = \frac{F}{G}$ mit $F(\alpha) \neq 0$ & G besitzt in α eine n-fache Nullstelle, so heißt α n-facher Pol von R.

A.3 Partialbruchzerlegung (PBZ)

Satz (PBZ) Sei $R = \frac{f}{g}$ eine ratio. Fkt. und es gelte $g(z) = (z-\alpha_1)^{n_1} \cdots (z-\alpha_s)^{n_s}$, wobei $\alpha_1, .., \alpha_s$ keine Nst von f seien ($\alpha_1, .., \alpha_s$ sind also Pole der Vielfachheiten $n_1, .., n_s$ von R)

Dann gilt $R = H_1 + .. + H_s + q$, wobei q ein Polynom ist und $H_k(z)$ folgende Form hat.

$$H_k(z) = \frac{{}^k a_{n_k}}{(z-\alpha_k)^{n_k}} + \frac{{}^k a_{n_k-1}}{(z-\alpha_k)^{n_k-1}} + \dots + \frac{{}^k a_1}{z-\alpha_k} \quad \text{mit } {}^k a_{n_k} \neq 0, \; {}^k a_j \in \mathbb{C}$$

H_k heißt Hauptteil von R im Punkt α_k, q Polynomanteil

Berechnen der PBZ

Bsp: $$\frac{x^7 + x^5 + 5x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 7x + 3}{x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Schritt 1a: Bestimme Polynomanteil q durch Div. mit Rest: $f = qg + r$

$$\begin{array}{l} (x^7 + x^5 + 5x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 7x + 3) : (x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1) = \underbrace{x^2 + x}_{q} \\ \underline{x^7 - x^6 + 2x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2} \\ \quad x^6 - x^5 + 7x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 7x + 3 \\ \quad \underline{x^6 - x^5 + 2x^4 - 2x^3 + x^2 - x} \\ \qquad 5x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 3 \end{array}$$

$$R(x) = x^2 + x + \frac{5x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 3}{x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1}$$

(1b) Faktorisiere den Nenner, kürze ggf Zähler & Nenner durch gemeinsame Polynome (Das Kürzen kann bereits vor Schritt 1a erfolgen, sollte dies geschickter sein)

$$x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1 = (x-1)(x^2+1)^2 = (x-1)(x+i)^2(x-i)^2$$

$1, i, -i$ sind Nst des Nenners, aber nicht des Zählers (Nachprüfen!), in diesem Bsp ist also kein Kürzen von Nöten.

(2a) Nun folgt der Ansatz für die Hauptteile

$$\frac{5x^4 - 2x^3 + \dots}{x^5 - x^4 + \dots} = \frac{{}^1a_2}{(x+i)^2} + \frac{{}^1a_1}{(x+i)} + \frac{{}^2a_2}{(x-i)^2} + \frac{{}^2a_1}{(x-i)} + \frac{{}^3a_1}{(x-1)}$$

Beachte ${}^k a_n$ ist i. A. komplex.

Für reelle ration. Fktn gilt aber:

- Die Hauptteile an konjugierten Polstellen haben bei entsprechenden Nennern konjugierte Koeff.
- Die Koeff zu reellen Polstellen sind reell.

Der Ansatz vereinfacht sich also zu

$$\frac{5x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 3}{(x+i)^2(x-i)^2(x-1)} = \frac{A}{(x+i)^2} + \frac{B}{x+i} + \frac{\bar{A}}{(x-i)^2} + \frac{\bar{B}}{x-i} + \frac{C}{x-1} \quad (*)$$

mit $A, B \in \mathbb{C}$, $C \in \mathbb{R}$.

(2b) Für jeden Hauptteil kann sofort der Koeff mit dem höchsten Index berechnet werden (also ${}^1a_2, {}^2a_2, {}^3a_1$)

${}^k a_{n_k}$ = Funktionswert von $R(z)(z-\alpha_k)^{n_k}$ an der St. α_k

Dh $\quad A = {}^1a_2 = \left.\dfrac{5x^4-2x^3+\ldots}{(x-i)^2(x-1)}\right|^{x=-i} = 1$

$$C = {}^3a_1 = \left.\frac{5x^4-2x^3+\ldots}{(x+i)^2(x-i)^2}\right|^{x=1} = 1.$$

(2c) Die Koeff. niedrigerer Ordnung (hier ${}^1a_1$, ${}^2a_1$) erhält man

- durch Koeffizientenvergleich in den Nennerpolynomen:
  Ausmult. der rechten Seite von (*) führt zu

$$\frac{A(x-i)^2(x-1)+B(x+i)(x-i)^2(x-1)+\bar{A}\ldots+\ldots}{(x+i)^2(x-i)^2(x-1)} \underset{A,\bar{A},C=1}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{(\ \ldots\ )x^4+(\ldots)x^3+(\ldots)x^2+(\ldots)x+(\ldots)}{(x+i)^2(x-i)^2(x-1)}$$

$$= \frac{5x^4-2x^3+4x^2-6x+3}{(x+i)^2(x-i)^2(x-1)}$$

- ODER

  durch Auswerten an hinreichend vielen Stützstellen

  Auswerten von (*) an d. St. 0 $\rightsquigarrow$ $B=\bar{B} \in \mathbb{R}$.

  (*) — " — -1 $\rightsquigarrow$ $B = 2$

Also: $$\frac{x^7+x^5+\ldots}{x^5-x^4+\ldots} = \frac{1}{(x+i)^2}+\frac{2}{(x+i)}+\frac{1}{(x-i)^2}+\frac{2}{x-i}+\frac{1}{x-1}+x^2+x$$

A.4 Integration ration. Funktionen.

Satz: Jede ration. Fktn mit reellen Koef. kann mittels ration. Fktn sowie des Logarithmus und des Arctan integriert werden.

Veranschaulichung des Vorgehens am Bsp.

$$\int R(x)\,dx = \int x^2+x\,dx + \int \frac{1}{x-1}\,dx + 2\int \frac{1}{(x+i)} + \frac{1}{(x-i)}\,dx + \int \frac{1}{(x-i)^2}+\frac{1}{(x+i)^2}\,dx$$

- $\int x^2+x\,dx = \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+C$ • $\int \frac{1}{x-1}\,dx = \log|x-1|+c$

- $\int \frac{1}{(x+i)}+\frac{1}{(x-i)}\,dx = \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \log(x^2+1)+C$

- $\int \frac{1}{(x-i)^2}+\frac{1}{(x+i)^2}\,dx = (-2+1)(x-i)^{-2+1} + (-2+1)(x+i)^{-2+1}$

$$= -\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i} = -\frac{2x}{x^2+1} + C$$

<u>Beachte</u>: • Für $k>1$ gilt für $a\in\mathbb{C}$

$$\int \frac{dx}{(x-a)^k} = \frac{1}{1-k}\,\frac{1}{(x-a)^{k-1}}\,,$$

da $\int \frac{dx}{(x-a)^k} = \int \mathrm{Re}\,\frac{1}{(x-a)^k}\,dx + i\int \mathrm{Im}\,\frac{1}{(x-a)^k}\,dx$

und $\mathrm{Re}\left[\frac{1}{(x-a)^k}\right] = \mathrm{Re}\left[\frac{d}{dx}\frac{1}{1-k}\frac{1}{(x-a)^{k-1}}\right] = \frac{d}{dx}\mathrm{Re}\left[\frac{1}{1-k}\frac{1}{(x-a)^{k-1}}\right]$

- Die PBZ hätte auch Terme $\frac{i}{(x+i)} + \frac{-i}{(x-i)}$ liefern können:

$$\int \frac{i}{x+i} + \frac{-i}{x-i}\,dx = \int \frac{2}{x^2+1}\,dx = 2\arctan x + c$$

- Allgemein: $\int \frac{A}{x-a} + \frac{\bar{A}}{x-\bar{a}}\,dx = \int \frac{Bx+C}{x^2+2bx+c}\,dx$ mit $b,c,B,C\in\mathbb{R}$ und $c^2>b$

$$= \ldots = \frac{B}{2}\log|x^2+2bx+c| + \frac{C-Bb}{\sqrt{c-b^2}}\arctan\left(\frac{x+b}{\sqrt{c-b^2}}\right)$$

A.5 Integration durch Zurückführen auf Integr. rat. Fktn.

Sei R eine rat. Fktn der Terme in Klammern.

i. $\int R(x, \sqrt[n]{x+1}) = n \int R(t^n - 1, t)\, t^{n-1}\, dt$

$t = \sqrt[n]{x+1}$

ii. $\int R(e^x)\, dx = \int R(t) \frac{1}{t}\, dt$ (Schließt den Fall $R(e^t, \sinh t, \cosh t)$ mit ein)

$t = e^x$

iii. $\int R(\cos\varphi, \sin\varphi)\, d\varphi = R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2}\, dt$

$t = \tan\frac{\varphi}{2}$

denn es gilt $\cos\varphi = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ $\quad \sin\varphi = \frac{2t}{1+t^2}$ $\quad \dot{\varphi} = \frac{2}{1+t^2}$

iv. $\int R(t, \sqrt{t^2+1})\, dt$, $\int R(t, \sqrt{t^2-1})\, dt$, $\int R(t, \sqrt{1-t^2})\, dt$

können mit $t = \sinh u$, $\sqrt{t^2+1} = \cosh u$ $\quad dt = \cosh u\, du$

bzw $t = \pm \cosh u$, $\sqrt{t^2-1} = \sinh u$ $\quad dt = \pm \sinh u\, du$

bzw $t = \pm \cos u$, $\sqrt{1-t^2} = \sin u$ $\quad dt = \mp \sin u\, du$

auf den Fall ii oder iii zurückgeführt werden.