X. Matrixexponential & Matrizen als Banachraum

Motivation: $\dot{x} = Ax$ hat die Lösung $x(t) = e^{At} x(0)$ wenn $A \in \mathbb{C}$.

Was wenn $A \in \underbrace{M_n(\mathbb{C})}_{\text{komplexe } n\times n \text{ Matrizen}}$ und $x: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$? Konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!}$? gleichmäßig?

Um Konvergenzaussagen in $M_n(\mathbb{C})$ machen zu können, benötigen wir Metrik bzw. Norm:

Def.: Die „Operatornorm" auf $M_n(\mathbb{C})$ ist def. als

$$\boxed{\|A\| := \sup_{v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Av\|}{\|v\|}}$$

wobei: $\|v\| = \left(\sum_{k=1}^{n} |v_k|^2 \right)^{1/2}$ (Euklidische Norm für Vektoren)

aus der Def. zeigt man leicht:

(i) $\|cA\| = |c| \, \|A\| \quad \forall c \in \mathbb{C}$

(ii) $\|A\| \geq 0$ und $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$

(iii) $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$

$\Big\} \to$ Norm ✓

Bemerkung: $\|A\|$ ist größter „Singulärwert" von A (siehe → Singulärwert-Zerlegung, Lin. Alg.)

Lemma: (Submultiplikativität)

$A, B \in M_n(\mathbb{C}) \Rightarrow \boxed{\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|}$

Beweis: Trivial für $B = 0$. Also $B \neq 0$:

$$\|AB\| = \sup_{v \neq 0} \frac{\|ABv\|}{\|v\|} = \sup_{v,\, Bv \neq 0} \frac{\|ABv\|}{\|Bv\|} \frac{\|Bv\|}{\|v\|}$$

$$\leq \sup_{w \neq 0} \frac{\|Aw\|}{\|w\|} \sup_{v \neq 0} \frac{\|Bv\|}{\|v\|} = \|A\| \, \|B\|$$

$\square$

Lemma: $A \in M_n(\mathbb{C}) \Rightarrow \boxed{\max_{k,l} |A_{kl}| \leq \|A\| \leq n \max_{k,l} |A_{k,l}|}$

Beweis:

- $|A_{k,l}| = |\langle e_k, A e_l \rangle| \leq \underbrace{\|e_k\|}_{=1} \|Ae_l\| \leq \|A\|$

  (e_k, e_l: Einheitsvektor; $\leq$: Cauchy-Schwarz)

- $\|Av\| = \left(\sum_k \left| \sum_l A_{kl} v_l \right|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_k \left(\sum_l |A_{kl}|^2 \right) \left(\sum_l |v_l|^2 \right) \right)^{1/2}$

  $\leq \max |A_{kl}| \cdot n \cdot \|v\|$

$\square$

Def.: Ein Vektorraum V mit Norm $\|\cdot\|$ heißt „Banachraum", wenn jede Cauchy-Folge in V bzgl. $\|\cdot\|$ konvergiert. (D.h. der normierte Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$ ist „vollständig")

Satz: $M_n(\mathbb{C})$ wird mit der Operatornorm zu einem Banachraum.

Beweis:
- klar ist $M_{\tilde{n}}(\mathbb{C}), \tilde{n} \in \mathbb{N}$ ein Vektorraum über $\mathbb{C}$.
- betrachte Cauchy-Folge: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall m,n > N: \; \|A_n - A_m\| < \varepsilon$

  da $|(A_n - A_m)_{kl}| \leq \|A_n - A_m\|$, ist $(A_n)_{kl}$ Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$

  $\Rightarrow (A_n)_{kl} \to A_{kl}$ konvergiert, da $\mathbb{C}$ vollständig

  mit $\|A_n - A\| \leq \tilde{n} \max\limits_{k,l} |(A_n - A)_{kl}|$ konv. damit auch $A_n \to A$ bzgl. $\|\cdot\|$

$\square$

Satz: $A \in M_n(\mathbb{C}) \Rightarrow \boxed{\exp(A) := \underbrace{\mathbb{1}}_{=:A^0} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k}{k!}}$ konvergiert.

1. Die Konvergenz ist absolut bzgl. $\|\cdot\|$ & gleichmäßig auf jedem Ball $B_r := \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid \|A\| \leq r\}$.
2. $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, $\boxed{AB = BA \Rightarrow \exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)}$
3. Die Abbildung $\mathbb{R} \ni t \mapsto \exp(tA) \in M_n(\mathbb{C})$ ist komponentenweise stetig diff.bar und es gilt: $\boxed{\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA} = e^{tA} A}$

Beweis: 1 • wegen Vollständigkeit genügt es z.z., dass $S_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}$ Cauchy-Folge:

$$\|S_n - S_m\| \overset{n>m}{=} \left\| \sum_{k=m+1}^{n} \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \frac{\|A^k\|}{k!} \underset{\text{Subadditivität}}{\leq} \sum_{k=m+1}^{n} \frac{a^k}{k!} \quad \text{mit } a = \|A\|$$

ist Cauchy, da $\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!}$ Cauchy

- Konvergenz ist absolut, da $\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{A^k}{k!} \right\| \leq e^a$
- –"– gleichm., da $\sup\limits_{A \in B_r} \left\| e^A - \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{r^k}{k!} \to 0$

② analog zu $e^{a+b} = e^a e^b$ für $a,b \in \mathbb{C}$

③ $$\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k}{k!} t^k \underset{\substack{\uparrow \\ \text{gl. konv.}}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k}{(k-1)!} t^{(k-1)} = A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^{(k-1)}}{(k-1)!} t^{(k-1)} = A e^{tA} = e^{tA} A$$

$\square$

Berechnung der Matrixexp.fkt.:

Jordan-Zerlegung: $A = X \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{J_m} \end{pmatrix} X^{-1}$, $X X^{-1} = \mathbb{1}$

Jordanblöcke: $(J_k) = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_k \end{pmatrix}$ $\Big\}$ → Lin. Alg.

$$\Rightarrow \quad \exp(A) = X \begin{pmatrix} \boxed{e^{J_1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{e^{J_m}} \end{pmatrix} X^{-1}$$

besonders einfach, wenn A diagonalisierbar; dann ist

$$\exp(A) = X \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} X^{-1}$$ mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

XI. Lineare, gewöhnliche Differentialgleichungen

DGL in der Physik:

- Newton'sche Bwgl. → kl. Mechanik
- Maxwell'sche Gl. → E-Dynamik
- Schrödinger Gl. → Quantentheorie
- Liouville Gl. → Stat. Physik
- Einstein'sche Feldgl. → ART

etc.

Bsp.: $m\ddot{x}(t) = F(x(t), \dot{x}(t), t)$

gesucht: $\mathbb{R} \ni t \mapsto x(t) \in \mathbb{R}^3$

Im Folgenden sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

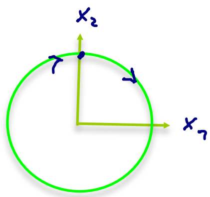
Def.: ∘ Eine stetige Abbildung $x:[t_1,t_2] \to \mathbb{K}^n$, $t \mapsto x(t)$ mit $t_2 > t_1 \in \mathbb{R}$ heißt „Kurve" im $\mathbb{K}^n$. t heißt „Parameter" und $x([t_1,t_2])$ „Spur".

∘ x heißt m-mal stetig diff.bar, falls dies für alle Komponenten $x_k(t)$ gilt.
$k = 1, \dots, n$

Die m-te Ableitung ist dann

$$x^{(m)} : t \mapsto \begin{pmatrix} x_1^{(m)}(t) \\ \vdots \\ x_n^{(m)}(t) \end{pmatrix}$$

Bsp.: ∘ $x(t) = \begin{pmatrix} \sin(2\pi\omega t) \\ \cos(2\pi\omega t) \end{pmatrix}$



$x(t) = x(t + \frac{1}{\omega})$

∘ $\dot{x}(t) = \frac{d}{dt} x(t)$ ist „Geschwindigkeit" / Tangente

Def.: Eine „gewöhnliche DGL k-ter Ordnung" ist von der Form

$$\boxed{x^{(k)}(t) = F\left(x^{(k-1)}(t), \dots, x^{(1)}(t), x(t), t\right) \quad \forall t \in I} \qquad (1)$$

Eine k-mal diff.bare Kurve $x: \tilde{I} \to \mathbb{K}^n$ mit $\tilde{I} \subseteq I$ heißt „Lösung", wenn (1) gilt.

Falls $n > 1$ spricht man von einem „System" von DGLen.

Bemerkung: „gewöhnlich" bedeutet hier, dass nur nach einer Variablen diff. wird. (sonst „partiell")