IX.3. Approximation & Konvergenz im quadratischen Mittel

Satz: Sei $f \in R$. Dann gilt

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \; \forall a \in \mathbb{C}^n: \quad \boxed{\| f - P_n f \|_2 \leq \| f - \sum_{k=-n}^{n} a_k e_k \|_2}$$

Gleichheit gilt g.d.w. $a_k = \hat{f}(k)$.

Beweis: (i) $$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \underbrace{\sum_{k=-n}^{n} \overline{a_k e_k(x)}}_{=: \overline{\alpha_n(x)}} dx = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) \overline{a_k}$$

(ii) $$\| \alpha_n \|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k,l=-n}^{n} \overline{a_k} a_l \overline{e_k(x)} e_l(x) \, dx \overset{\langle e_k, e_l \rangle = \delta_{kl}}{=} \sum_{k=-n}^{n} |a_k|^2$$

$$\| f - \alpha_n \|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(|f(x)|^2 - \overline{\alpha_n(x)} f(x) - \alpha_n(x) \overline{f(x)} + |\alpha_n(x)|^2 \right) dx$$

$$\overset{(i)\&(ii)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx + \sum_{k=-n}^{n} \left(|a_k|^2 - \hat{f}(k) \overline{a_k} - \overline{\hat{f}(k)} a_k \right)$$

$$= \| f \|_2^2 + \sum_{k=-n}^{n} \left(|\hat{f}(k) - a_k|^2 - |\hat{f}(k)|^2 \right)$$

minimal g.d.w. $\hat{f}(k) = a_k \Rightarrow \alpha_n = P_n f$ $\square$

D.h. $P_n f$ ist bezgl. $\|\cdot\|_2$ (also im „quadratischen Mittel") die beste Approximation an f mittels eines trigonom. Polynoms vom Grad n.

Satz: (Konvergenz im quadrat. Mittel)

Für $f \in R$ gilt: $$\boxed{\lim_{n \to \infty} \| f - P_n f \|_2 = 0}$$

Beweis: (für $f \in C^0$)

$F_n f := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P_k f$ ist trig. Polynom vom Grad $< n$.

$$\| g \|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^2 dx \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \| g \|_\infty^2 dx = \| g \|_\infty^2$$

Aus obigem Satz folgt $\| f - P_n f \|_2 \leq \| f - F_n f \|_2$

Außerdem gilt $\| f - F_n f \|_2 \leq \| f - F_n f \|_\infty$

wobei hier $\| g \|_\infty := \sup_{x \in [-\pi, \pi]} |g(x)|$ für $g \in R$.

Wenn $f \in C^0$ gilt $F_n f \to f$ gleichmäßig, d.h. $\|f - F_n f\|_\infty \to 0$.

Somit folgt $\|f - P_n f\|_2 \to 0$. □

Der allgemeine Fall kann auf den stetigen zurückgeführt werden, wenn man verwendet, dass für jedes $\varepsilon > 0$ und $f \in R$ ein $g \in C^0$ existiert, so dass $\|f - g\|_2 < \varepsilon$ ...

Satz: (Parsevalsche Identität)

Für $f, g \in R$ gilt: $\boxed{\langle f, g \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{\hat{f}(k)}\, \hat{g}(k)}$ (1)

d.h. insbesondere: $\boxed{\|f\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2}$ (2)

Beweis: Wir hatten gezeigt, dass

$$\|f - P_n f\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^{n} |\hat{f}(k)|^2 \quad \forall f \in R$$

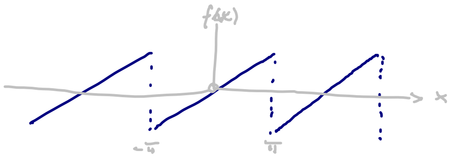
Mit der Konvergenz im quadrat. Mittel folgt damit (2).

(1) folgt aus (2) durch Verwendung der Identität

$$a\bar{b} = \frac{1}{4}\left(|a+b|^2 - |a-b|^2 + i|a+ib|^2 - i|a-ib|^2\right)$$

□

Bsp.: $f(x) = x$, $x \in [-\pi, \pi]$



$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\, e^{-ikx}\, dx$$

$$= \frac{i}{2\pi}\int_{\pi}^{-\pi} x \sin(kx)\, dx \overset{\text{part. Integr., } k \neq 0}{=} \frac{i}{2\pi}\left(\left[\frac{x}{k}\cos(kx)\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k}\underbrace{\int_{\pi}^{-\pi} \cos(kx)\, dx}_{0}\right) = \frac{i\cos(k\pi)}{k}$$

$$= \underline{\underline{i\,\frac{(-1)^k}{k}}} \text{ für } k \neq 0 \text{ und } \hat{f}(0) = 0.$$

Korollar: (Basler Problem)

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

Beweis: Für $f(x) = x$ gilt

$$\text{Parseval} \Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\, dx = \frac{1}{6\pi}\left[x^3\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}$$

$$= 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \quad \text{da } |\hat{f}(k)| = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ \frac{1}{k}, & k \neq 0 \end{cases}$$

□

IX. 4. Ausblick: Fourier-Transformation

(im Detail später ... IX. 4. nicht klausurrelevant)

Fourierreihen: Darstellung periodischer Funktionen $f \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)\, e^{ikx} \quad , \quad \hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-ikx}\, dx$$

Fouriertransformation: Darstellung von Fkt.en $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, die im Unendl. schnell genug abfallen

$$L^p(\mathbb{R}) := \left\{ f: \mathbb{R} \to \mathbb{C} \;\middle|\; \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx < \infty \right\}$$

Def.: Für $f \in L^1(\mathbb{R})$ heißt

$$\boxed{\hat{f}(k) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ikx}\, dx}$$

„Fouriertransformierte" von f.

Bem.: $f \in L^1(\mathbb{R})$ garantiert, dass $\hat{f}$ wohldefiniert ist (d.h. Int. konvergiert)

Satz: Wenn $f \in L^1(\mathbb{R})$ stetig und $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ die zugehörige Fouriertransformierte ist, dann gilt:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)\, e^{ikx}\, dk}$$

„Spektraldarstellung"

Bem.:
- Wir definieren wieder ein Skalarprodukt, so dass $\hat{f}(k) = \langle e_k, f \rangle$ und eine Norm $\|f\|_2 := \langle f, f \rangle^{1/2}$
- Für schnell abfallende Funktionen gilt wieder $\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = \langle f, g \rangle$ und damit $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$ } „Plancherel"

Anwendung (1) Unschärferelation:

$$\boxed{\langle f, x^2 f \rangle \langle \hat{f}, k^2 \hat{f} \rangle \geq \frac{1}{4} \|f\|_2^2}$$

$$\langle f, x^2 f \rangle := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |x f(x)|^2 dx$$

$$\langle \hat{f}, k^2 \hat{f} \rangle := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |k \hat{f}(k)|^2 dk$$

Interpretationen:
- Ein Signal kann nicht in Zeit & Frequenz gut lokalisiert sein
- Heisenberg: Ort & Impuls können nicht simultan bel. scharf präpariert werden.

Beweisidee: mit part. Int. zeigt man $\mathrm{Re}\langle f', xf\rangle = -\frac{1}{2}\|f\|_2^2$.

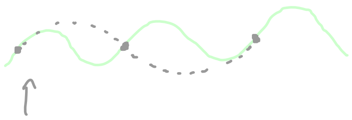
Damit ist

$$\frac{1}{2}\|f\|_2^2 \leq |\langle f', xf\rangle| \overset{\text{Cauchy Schwarz}}{\leq} \|f'\|_2^2 \, \|xf\|_2^2$$

$$= \|\hat{f'}\|_2^2 \, \|xf\|_2^2 = \|k\hat{f}\|_2^2 \, \|xf\|_2^2 \qquad \square$$

Anwendung (2): Shannon-Nyquist Abtasttheorem:

Eine stetige Funktion $f \in L^1(\mathbb{R})$ mit $\hat{f}(k) = 0 \ \forall : |k| \geq 2\pi\Omega$ kann aus den Werten $f(nT)$, $n \in \mathbb{Z}$ rekonstruiert werden, wenn $\boxed{T < \frac{1}{2\Omega}}$.



unzureichende Abtastrate

(D.h. die „Abtastfrequenz" sollte > 2 mal max. Frequenz im Signal sein.)