# VII. 5. Integration und Funktionenfolgen

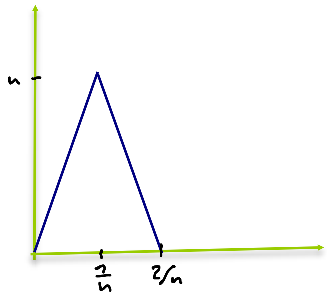
**Frage:** wann gilt $\boxed{\lim_{n\to\infty} \int_I f_n(x)\,dx \overset{?}{=} \int_I \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx}$ ?

**Probleme:** 1) Es kann passieren, dass $\forall n: f_n \in R(I)$ und dennoch $f := \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) \notin R(I)$, d.h. $\int_I \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$ divergent.

z.B.: $I = [0,1]$, $f_n(x) := \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in [\frac{1}{n}, 1] \\ 0, & x \in [0, \frac{1}{n}) \end{cases}$ und damit $f(x) = \frac{1}{x}$

2) Selbst wenn $\int_I \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$ konvergiert, vertauscht der Limes nicht notwendigerweise mit dem Integral.

z.B. $f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & x \in [\ \frac{1}{n} \\ 2n - n^2 x & x \in (\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \\ 0 & x \in (\frac{2}{n}, 2] \end{cases}$




$\Rightarrow \int_0^2 f_n(x)\,dx = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$

und daher $\lim_{n\to\infty} \int_0^2 f_n(x)\,dx = 1$,

aber $\forall x \in [0,2]: f_n(x) \to 0$ für $n \to \infty$

und damit $\int_0^2 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = 0$.

Beobachtung: in beiden Fällen konvergiert $f_n \to f$ punktweise aber nicht gleichmäßig.
(zur Erinnerung: $f_n \to f$ gleichmäßig auf $I$ wenn $\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \to 0$)

**Satz:** Sei $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f_n \to f$ gleichmäßig auf $[a,b]$, dann ist

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx}$$

d.h. die rechte Seite konvergiert

**Beweis:** $f_n$ stetig u. $f_n \to f$ gleichmäßig $\Rightarrow$ $f$ stetig $\Rightarrow$ $f \in R([a,b])$.

$$\left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right| \le \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \qquad (\text{o.B.d.A. } b \ge a)$$

$$\le (b-a) \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \to 0 \qquad \square$$

**Korollar:** (Integration von Potenzreihen)

Ist $R \in (0,\infty]$ Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad a_n \in \mathbb{R}$,

dann gilt für alle $a, b \in (-R, R)$:

$$\int_a^b \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^b x^n \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \left( b^{n+1} - a^{n+1} \right).$$

**Beweis:** folgt aus der Tatsache, dass die Partialsummen gleichmäßig konvergieren. $\square$

# VIII. Approximation von Funktionen durch Polynome

## VIII.1. Taylor-Polynome

**Bekannt:** „lineare Approximation" um $a \in I$ falls $f'(a)$ existiert:

$$f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a)(x-a)}_{\text{Polynom 1. Ordnung in } x} + o(x-a)$$

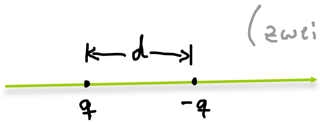
**Frage:** Bessere Approximation um $a$ durch Polynome $n$-ter Ordnung?

**In der Physik:** „Störungsrechnung"

Bsp.: „Dipolnäherung" für Potential entlang $x$-Achse

$$V(x) = \frac{q}{|x|} - \frac{q}{|x-d|} \approx -q d \frac{x}{|x|^3} \quad \text{falls } \frac{d}{|x|} \text{ klein}$$

(zwei Punktladungen im Abstand $d$)




**Def.:** Sei $f$ eine im Punkt $a$ $n$-mal diff.bare Funktion, dann heißt

$$\boxed{T_n(x;a) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k}$$

„$n$-tes Taylorpolynom von $f$ um $a$".

Im Folgenden interessieren wir uns für den 'Fehler' $R_{n+1}(x) := f(x) - T_n(x;a)$

Bemerkung: Die Koeffizienten im Taylorpolynom sind so gewählt, daß

$T_n^{(k)}(x;a) = f^{(k)}(a)$ bei $x=a$ für alle $k \le n$.

**Satz:** (Taylor Approximation)

Sei $f \in C^{n+1}(I)$ und $a \in I$. Dann gilt $\forall x \in I$:

(1) $$\boxed{R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt}$$

(2) $\exists y \in [a,x]$ : $$\boxed{R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(y)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}$$ „Lagrange Form"

**Beweis:** (1) Induktion nach $n$: für $n=0$ ist $= \int_a^x f'(t)\,dt \overset{\text{HDI}}{=} f(x) - f(a)$

und $R_1 = f(x) - T_0(x;a) = f(x) - f(a)$ ✓

Induktionsannahme (für $n-1$): $f(x) - T_{n-1}(x;a) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\,dt$

$$\overset{\text{part. Integration}}{=} \underbrace{\left[-\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n\right]_{t=a}^{t=x}}_{=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n} + \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$$

(1) folgt dann aus $T_n(x;a) = T_{n-1}(x;a) + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$.

(2) (nur Beweis-Idee:) folgt aus (1) mit Hilfe einer Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes der Integralrechnung.

$\square$

Erinnerung: „Landau-Symbole"

Man schreibt $f(x) = o(g(x))$ für $x \to a$ falls $\lim\limits_{x\to a}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = 0$

" " $f(x) = O(g(x))$ " " falls $\limsup\limits_{x\to a}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < \infty$

(wobei $\limsup\limits_{x\to a} h(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x)$ wenn der Limes existiert)

**Satz:** (Qualitative Taylorformeln) Sei $a \in I$.

$$\boxed{\begin{array}{lll} (1)\ f \in C^n(I) & \Rightarrow & f(x) - T_n(x;a) = o\left((x-a)^n\right) \quad \text{für } x \to a \\ (2)\ f \in C^{n+1}(I) & \Rightarrow & \quad \text{—"—} \quad = O\left((x-a)^{n+1}\right) \quad \text{—"—} \end{array}}$$

**Beweis:** (1) $f(x) - T_{n-1}(x;a) = \dfrac{f^{(n)}(y)}{n!}(x-a)^n$ für ein $y \in [a,x]$

Lagrange Form für $R_n$

$$\Rightarrow f(x) - T_n(x;a) = \frac{1}{n!}(x-a)^n \left(f^{(n)}(y) - f^{(n)}(a)\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a} \left| \frac{f(x) - T_n(x;a)}{(x-a)^n} \right| = \frac{1}{n!} \lim_{x\to a} \left| f^{(n)}(y) - f^{(n)}(a) \right| = 0$$

da $f^{(n)}$ stetig und $y \to a$ für $x \to a$

(2) $$|R_{n+1}(x)| = \left| \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt \right|$$ o.B.d.A. $a \le x$

$$\le \frac{1}{n!}\left[\sup_{t\in[a,x]} |x-t|^n \left|f^{(n+1)}(t)\right|\right] \int_a^x dt \le \frac{|x-a|^{n+1}}{n!} \sup_{t\in[a,x]} \left|f^{(n+1)}(t)\right|$$

$$\Rightarrow \limsup_{x\to a} \frac{|R_{n+1}(x)|}{|x-a|^{n+1}} \le \frac{1}{n!} \limsup_{x\to a} \sup_{t\in[a,x]} \left|f^{(n+1)}(t)\right| < \infty$$

da $f^{(n+1)}$ stetig

$\square$

**Beispiele:**

- $f: (-1,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) := (1+x)^{-1/2}$

  Taylorentwicklung um $x=0$

  $f'(x) = -\frac{1}{2}(1+x)^{-3/2} \Rightarrow f'(0) = -\frac{1}{2}$

  $f''(x) = \frac{3}{4}(1+x)^{-5/2} \Rightarrow f''(0) = \frac{3}{4}$

  $$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + O(x^3)}$$

- $f(x) = \ln(1+x)$ auf $(-1,\infty)$

  Entwicklung um $x=0$:

  $f'(x) = \dfrac{1}{1+x} \Rightarrow f'(0) = 1$

  $f''(x) = -(1+x)^{-2} \Rightarrow f''(0) = -1$

  $$\Rightarrow \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3)$$

allgemein gilt:

$$\boxed{\log(1+x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k} \quad \text{für } |x|<1}$$

Konvergenzradius:

$$R = \left(\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)^{-1} = \left(\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\right|\right)^{-1} = 1$$