Regel von L'Hospital (was tun mit Limiten der Form "$\frac{0}{0}$" oder "$\frac{\infty}{\infty}$"?)

Satz: Wenn $f, g: D \to \mathbb{R}$ differenzierbar sind und $g'(x_0) \neq 0$, dann gilt

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}} \quad \text{falls } f(x_0) = g(x_0) = 0.$$

Beweis: $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0) + f'(x_0)h + o(h)}{g(x_0) + g'(x_0)h + o(h)} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0) + \frac{o(h)}{h}}{g'(x_0) + \frac{o(h)}{h}} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$ $\square$

Bem.:
- allgemein gilt $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ wenn der rechte Limes existiert.
- analog zu "$\frac{0}{0}$" ist "$\frac{\infty}{\infty}$"
- manchmal sind höhere Ableitungen notwendig, d.h. ggfs. $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x_0)}$

3. Differentiation von Funktionenfolgen & Potenzreihen

Problem: Gleichmäßige Limiten diff.barer Funktionen müssen nicht diff.bar sein.

Bsp.: $f_n(x) := \sqrt{x^2 + 1/n^2}$ konvergiert gleichmäßig gegen $x \mapsto |x|$

$f_n'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1/n^2}}$ konvergiert punktweise (aber nicht gleichmäßig)

Satz: Sei $f_n: (a,b) \to \mathbb{C}$ eine Folge diff.barer Funktionen für die gilt:

(i) $\exists x_0 \in (a,b)$: $f_n(x_0)$ konvergiert für $n \to \infty$

(ii) die Funktionenfolge f_n' konvergiert gleichmäßig auf (a,b)

Dann gilt:

(1) f_n konvergiert gleichmäßig auf (a,b) gegen eine diff.bare Funktion f

(2) $\forall x \in (a,b)$: $f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$

Bem.: (2) bedeutet, daß folgende Limiten vertauschen:

$$\lim_{h\to 0} \lim_{n\to\infty} \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} = \lim_{n\to\infty} \lim_{h\to 0} \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h}$$

Beweis: → Matte Skript

Lemma: Wenn $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ mit $a_n \in \mathbb{C}$ Konvergenzradius $R \in [0,\infty]$ hat, dann besitzt $g(x) := \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$ ebenfalls –"– R.

Beweis:
- g hat denselben Konvergenzradius wie $\sum_{n=1} n a_n (x-x_0)^n =: h(x)$
- $$R_h = \left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|a_n|}\right)^{-1} \underset{\uparrow}{=} \left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\right)^{-1} = R$$
  $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$\square$

Satz: Wenn $R \in [0,\infty]$ Konvergenzradius von $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit $a_n \in \mathbb{C}$ ist, dann ist $f : (-R,R) \to \mathbb{C}$ diff.bar und es gilt

$$\boxed{f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}}$$

Beweis: $f_N(x) := \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$ ist stetig diff.bar und f_N sowie f_N' konvergieren gleichmäßig.
Damit gilt $f' = \lim_{N\to\infty} f_N'$

$\square$

4. Ableitungen einiger Funktionen

- $f(x) = e^{cx}$, $c \in \mathbb{C}$ $\Rightarrow$ $f'(x) = c e^{cx}$
  $$(e^{cx})' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} c^n \frac{x^n}{n!}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(c^n \frac{x^n}{n!}\right)' = c \sum_{n=1}^{\infty} n c^{n-1} \frac{x^{n-1}}{n!} = c \sum_{n=0}^{\infty} c^n \frac{x^n}{n!} = c e^{cx}$$

- $\sin' = \cos$: $\quad \sin(x)' = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)' = \cos(x)$
- $\cos' = -\sin$

  $$\Rightarrow \tan' = \left(\frac{\sin}{\cos}\right)' = \frac{\cos\sin' - \sin\cos'}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2$$

- $f(x) = \ln(x)$ $\Rightarrow$ $f'(x) = \frac{1}{x}$ auf $(0,\infty)$
  $$f(x) = g^{-1}(x) \text{ mit } g(x) = e^x$$
  $$\Rightarrow f' = (g^{-1})' = \frac{1}{g' \circ g^{-1}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

- $f(x) = a^x$, $a \in \mathbb{C}$ $\Rightarrow$ $f'(x) = a^x \ln a$
  $$f(x) = e^{x \ln a} \Rightarrow f'(x) = (\ln a)\, e^{x \ln a}$$

- $f(x) = x^a$, $a \in \mathbb{C}$ $\Rightarrow$ $f'(x) = (e^{a \ln x})' = x^{a-1} a$

- $f(x) = \arctan x$ $\Rightarrow$ $f' = \frac{1}{\tan' \circ \arctan} = \frac{1}{1 + \tan^2 \circ \arctan} = \frac{1}{1+x^2}$

5. Mittelwertsatz, Monotonie & Extrema

Satz: (von Rolle) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ diff.bar und $f(a)=f(b)$, $a\neq b$

$\Rightarrow \exists x_0\in(a,b): f'(x_0)=0$

Beweisidee:
- f konst. $\Rightarrow f'(\frac{b+a}{2})=0$
- f nicht konst. $\Rightarrow f$ hat Max./Min. $\Rightarrow f'(x_0)=0$ für ein $x_0\in(a,b)$ $\square$

Satz: (Mittelwertsatz) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ diff.bar, $b>a$

$\Rightarrow \exists x_0\in(a,b): f(b)-f(a)=(b-a)f'(x_0)$

Beweis: $F(x):=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{(b-a)}(x-a)$ erfüllt $F(a)=F(b)$

$\overset{\text{S.v. Rolle}}{\Rightarrow} \exists x_0\in(a,b): 0=F'(x_0)=f'(x_0)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ $\square$

Korollar: (Monotoniekriterium) Wenn $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ diff.bar ist, dann gilt auf (a,b):

$$f'\begin{cases} > \\ \geq \\ < \\ \leq \end{cases} 0 \Leftrightarrow f\begin{cases} \text{streng mon. wachsend} \\ \text{-"- -"-} \\ \text{-"- -"- fallend} \\ \text{-"- -"-} \end{cases}$$

Beweis: '$\Rightarrow$' folgt aus dem Mittelwertsatz
'$\Leftarrow$' -"- Def. des Differentialquotienten.

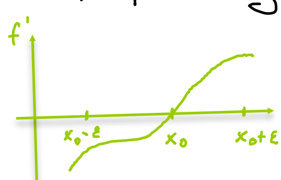
Korollar: (Kriterien für Extrema) $f\in C^2((a,b))$ und $f'(x_0)=0$ für $x_0\in(a,b)$.

(i) $f''(x_0)>0 \Rightarrow f$ hat „lokales Minimum" bei x_0,
d.h. $\exists\varepsilon>0: x\in B_\varepsilon(x_0)\setminus\{x_0\}\Rightarrow f(x)>f(x_0)$

(ii) $f''(x_0)<0 \Rightarrow f$ hat „lokales Maximum" bei x_0,
d.h. $\exists\varepsilon>0: x\in B_\varepsilon(x_0)\setminus\{x_0\}\Rightarrow f(x)<f(x_0)$

Beweis: f'' stetig $\overset{(i)}{\Rightarrow} \exists\varepsilon>0: x\in B_\varepsilon(x_0)\Rightarrow f''(x)>0$

$\Rightarrow f'$ streng monoton steigend in $B_\varepsilon(x_0)$



$I_\pm := (x_0, x_0\pm\varepsilon)$

$\overset{\text{Mittelwertsatz}}{\Rightarrow}$ ∘ $\forall x\in I_- \exists y: f(x_0)-f(x) = f'(y)(x_0-x)<0$

∘ $\forall x\in I_+ \exists\tilde{y}: f(x)-f(x_0) = f'(\tilde{y})(x-x_0)>0$

(ii) analog.. $\square$

Satz (Diff.barkeit u. Lipschitzstetigkeit) Sei $f: I \to \mathbb{C}$ diff.bar. Dann gilt:

$$\left(\forall x \in I : |f'(x)| \le L\right) \Rightarrow \forall x_1, x_2 \in I: \quad |f(x_1)-f(x_2)| \le L|x_1-x_2|$$

Beweis: $c := \exp\left(-i \arg(f(x_1)-f(x_2))\right)$ d.h. $c\left(f(x_1)-f(x_2)\right) = |f(x_1)-f(x_2)|$

$g(x) := \mathrm{Re}(c f(x))$

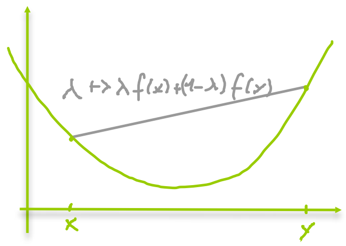
Mittelwertsatz $\Rightarrow \exists y \in (x_1,x_2): \; g(x_2)-g(x_1) = (x_2-x_1)\, g'(y)$

$\Rightarrow \; |f(x_2)-f(x_1)| = g(x_2)-g(x_1) = (x_2-x_1)\,\mathrm{Re}(cf'(y)) \le L|x_2-x_1|$

$\mathrm{Re}(cf'(y)) \le |cf'(y)| = |f'(y)| \le L$ □

6. Konvexität

Def.:
- $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ heißt „konvex" wenn
  $\forall x,y \in (a,b)\; \forall \lambda \in [0,1]: \; \boxed{f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)}$
- gilt für $\lambda \notin \{0,1\}$ "$<$" heißt f „strikt konvex".
- f heißt „(strikt) konkav", wenn $(-f)$ (strikt) konvex ist.



f konvex $\Leftrightarrow$ Graph liegt unter Verbindungslinie
konkav $\Leftrightarrow$ —"— über —"—

Bsp. für streng konvexe Funktionen:
- $x \mapsto x^2$
- $x \mapsto e^x$

$\}$ auf $\mathbb{R}$

- $x \mapsto -\ln x$
- $x \mapsto -\sqrt{x}$

$\}$ auf $(0,\infty)$

Satz: (Jensen'sche Ungleichung)
Wenn $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ konvex, $x_j \in (a,b)$, $j=1,\dots,n \in \mathbb{N}$, dann gilt:

$$\boxed{\left(\lambda_j \ge 0 \wedge \sum_j \lambda_j = 1\right) \Rightarrow f\left(\sum_j \lambda_j x_j\right) \le \sum_j \lambda_j f(x_j)}$$

Beweisidee: Induktion über n. $n=2$: Def. von Konvexität

Satz: Ist $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ zweimal diff.bar dann gilt

$$\boxed{f'' \geq 0 \Leftrightarrow f \text{ konvex}}$$

Beweis: '$\Leftarrow$': $f''(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{1}{2}\left[f(x+h)+f(x-h)\right]-f(x)}{\frac{1}{2}h^2} \geq 0$

'$\Rightarrow$': $f''\geq 0 \Rightarrow f'$ monoton wachsend

$x_\lambda := \lambda x_1 + (1-\lambda)x_0$, $x_1 > x_0$, $\lambda\in(0,1)$

Mittelwertsatz $\Rightarrow$ $\exists y_0 \in (x_0, x_\lambda)$ $\exists y_1 \in (x_\lambda, x_1)$:

$$\frac{f(x_\lambda)-f(x_0)}{x_\lambda - x_0} = f'(y_0) \leq f'(y_1) = \frac{f(x_1)-f(x_\lambda)}{x_1 - x_\lambda}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{f(x_\lambda)-f(x_0)}{\lambda(x_1-x_0)} \leq \frac{f(x_1)-f(x_\lambda)}{(1-\lambda)(x_1-x_0)}$$

$$\Rightarrow \quad f(x_\lambda) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_0)$$

$\square$

Bem.: Analog zeigt man, daß f strikt konvex $\Leftarrow f''>0$.

Wichtige Anwendung der Jensen'schen Ungleichung:

Satz (Hölder Ungleichung): $a,b\in\mathbb{C}^n$, $p>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{j=1}^n |a_j b_j| \leq \|a\|_p \cdot \|b\|_q} \quad \text{mit } \|a\|_p := \left(\sum_{j=1}^n |a_j|^p\right)^{1/p} \text{ „p-Norm"}$$

Bem.:
- folgt aus Konvexität von $x\mapsto x^p$
- Spezialfall $p=q=2$: „Cauchy-Schwarz-Ungleichung"
- Hölder-Ungl. gilt auch für $p=1$, $q=\infty$ mit $\|a\|_\infty = \max\limits_j\{|a_j|\}$