Def (Norm). Sei V ein $\mathbb{R}$-($\mathbb{C}$) VR. Die Abb $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_0^+$ erfülle

(i) $\|v\| = 0 \Rightarrow v = 0$

(ii) $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\| \quad \forall v \in V, \lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$

(iii) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \quad \forall v, w \in V$

Bem:
- $(V, \|\cdot\|)$ heißt normierter VR
- Eine Norm stellt ein "Längenmaß" auf einem VR dar.
- Die Betragsfunktion definiert eine Norm auf $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$)
- Die euklid. Norm auf $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) ist def. als

  $\|v\| = (|v_1|^2 + \ldots + |v_n|^2)^{\frac{1}{2}}$
- Jede Norm $\|\cdot\|$ auf V induziert eine Metrik auf V durch $d_{\|\cdot\|}(v,w) := \|v - w\|$.

Sei (X, d_X) metr. Raum. $Y = \mathbb{C}$ mit Betragsmetrik.

Def:
- $\mathcal{F}(X) := \{\text{Funktionen } f: X \to \mathbb{C}\}$ • $\mathcal{F}_b(X) = \{f: X \to \mathbb{C} \mid f \text{ beschr.}\}$
- $f: X \to \mathbb{C}$ heißt beschränkt $\Leftrightarrow$

  $(\exists c > 0 \text{ sd. } |f(x)| \leq c \ \forall x \in X)$
- $\mathcal{F}(X) \supseteq \mathcal{C}(X) := \{f: X \to \mathbb{C} \mid f \text{ ist stetig \& beschränkt}\}$

Korollar 1:
- $\mathcal{F}(X)$ mit pktweiser Add. & skalarer Mult. bildet einen VR
- $\mathcal{F}_b(X)$ und $\mathcal{C}(X)$ sind Unter VR von $\mathcal{F}(X)$.

Bew: ✓ ∎

Lemma 4 $\|f\|_X := \sup_{x \in X} |f(x)|$ definiert eine Norm, die <u>Supremums-Norm</u> auf $\mathcal{F}_b(X)$.

Bem: (und damit auch auf $\mathcal{C}(X)$.)

Bew.: $\forall f,g \in \mathcal{E}(X)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt:

(0) $\infty > \|f\|_X \geq 0$.

(i) $\|f\|_X = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \ \forall x \in X$ dh $f \equiv 0$

(ii) $\|\lambda \cdot f\|_X = |\lambda| \|f\|_X$

(iii) $|(f+g)(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_X + \|g\|_X \quad \forall x \in X$

$$\Rightarrow \quad \|f+g\|_X := \sup_{x \in X} |(f+g)(x)| \leq \|f\|_X + \|g\|_X \quad \blacksquare$$

Bemerke: für $f_n : X \to \mathbb{C}$, $f : X \to \mathbb{C}$ gilt

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon \ \forall x \iff \|f_n - f\|_X \leq \varepsilon$$

Damit folgt: (f_n) konv. glm. gegen $f \iff$

$\Big($ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}$ gilt

$n \geq N \Rightarrow \|f_n - f\|_X < \varepsilon$.

d.h. f_n konvergiert gegen f in der durch Sup-Norm induzierten Metrik. $\Big)$

Def (normale Konvergenz)

Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ von Funktionen $f_n : X \to \mathbb{C}$ heißt n. konv., wenn f_n beschränkt ist $\forall n$ und die Reihe der Normen $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_X$ konvergiert.

Lemma 5 Eine auf X normal konv. Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_n$ konvergiert dort auch gleichmäßig gegen eine ~~Grenzfunktion~~ f

---

dh $\exists\, f \in \mathcal{F}(X)$ mit $\|f - \sum_{k=1}^{n} f_k\|_X \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

Bew: Sei f die Grenzfunktion $f(x) := \lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$

(f ist wohldef gemäß Major'krit, $\|f_k\|_X$ als Majorante).

Sei $\varepsilon > 0$

Wähle $n \in \mathbb{N}$ sd $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_X < \varepsilon$

Für $x \in X$ beliebig gilt: $\left| f(x) - \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x) \right| = \left| \lim\limits_{N \to \infty} \sum\limits_{k=n+1}^{N} f_k(x) \right|$

$$= \lim_{N \to \infty} \left| \sum_{k=n+1}^{N} f_k(x) \right|$$

$$\leq \lim_{N \to \infty} \sum_{k=n+1}^{N} |f_k(x)|$$

$$\leq \lim_{N \to \infty} \sum_{k=n+1}^{N} \|f_k\|_X \leq \varepsilon$$

$$\Rightarrow \|f - \sum_{k=1}^{n} f_k\|_X = \sup_{x \in X} \left| f(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right| \leq \varepsilon \quad \blacksquare$$

Korollar 2 Eine Reihe $f = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ konvergiere normal auf X, mit $f_k : X \to \mathbb{C}\ \forall k$. Dann gilt:

$f_k : X \to \mathbb{C}$ stetig in x_0 $\forall k \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$

$f : X \to \mathbb{C}$ stetig in x_0

Bew

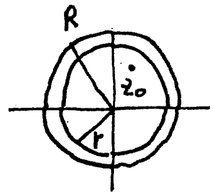
$$\left.\begin{array}{ll} \sum\limits_{k=1}^{n} f_k \xrightarrow{glm} f & \text{glm. Laut Lemma 5} \\ \sum\limits_{k=1}^{n} f_k \text{ ist stetig in } x_0 & \text{laut Lemma 3} \end{array}\right\} \overset{\text{Satz 1}}{\Longrightarrow} f \text{ stetig in } x_0$$

Satz 2 Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ eine Potenzreihe mit K.radius R.

Dann ist $f : K_R := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < R \} \to \mathbb{C}$

$$z \mapsto f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad \text{stetig}$$

Bew Sei $z_0 \in K_R$



Wähle r sd $|z_0| < r < R$

Betrachte $a_k z^k \ (= f_k) : K_r (= X) \to \mathbb{C}$ stetig in z_0

$\| a_k z^k \|_{K_r} = |a_k| r^k$

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ ist normal konv in K_r

$\left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \overset{\text{korollar 2}}{\Longrightarrow} \left\{ f \text{ stetig in } z_0 \right.$

∎

Bsp Exp ist stetig in ganz $\mathbb{C}$.

Satz 3 $\mathcal{C}(X)$ mit der sup-Norm ist vollständig.

Bem.: Ein vollst. normierter VR heißt Banachraum.

Bew: Sei (f_n) eine Cauchyfolge in $\mathcal{C}(X)$.

Es gilt $|f_n(x) - f_m(x)| \le \| f_n - f_m \|_X$

$\Rightarrow (f_n(x)) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ ist C. Folge $\forall x \in X$ und somit konvergent.

Definiere $f : X \to \mathbb{C}$

$$x \mapsto \lim_{n \to \infty} f_n(x) \quad \text{d.h. } f_n \to f \text{ pktweise.}$$

Nun gilt es zu zeigen
(i) $f \in \mathcal{C}(X)$
(ii) $\| f - f_n \| \to 0$

(ii) Wir zeigen $f_n \to f$ glm.. (Mit Satz 1 folgt daraus f stetig)

Sei also $\varepsilon > 0$

$\exists\ N \in \mathbb{N}$ sd für $n, m \in \mathbb{N}$: $n, m \geq N \Rightarrow \|f_n - f_m\|_X < \varepsilon$

Für jedes $x \in X$ und jedes $n \geq N$ folgt nun:

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x) - \lim_{m \to \infty} f_m(x)| =$$

$$= \lim_{m \to \infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \lim_{m \to \infty} \|f_n - f_m\|_X$$

$$\leq \varepsilon$$

$\Rightarrow \|f_n - f\|_X \leq \varepsilon$.

(i) Aus (ii) $\Rightarrow \exists\ n \in \mathbb{N}$ sd $\|f_n - f\| < 1$

Sei $x \in X$: $|f(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)|$

$$\leq 1 + \|f_n\|_X$$

$\Rightarrow \|f\|_X \leq 1 + \|f_n\|_X$ somit ist f beschr. & stetig (laut (ii)) $\Rightarrow$ (i)

∎