TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Zentrum Mathematik

PROF. DR. M. WOLF
D. LERCHER
O. SZEHR

Höhere Mathematik II für Physiker

Analysis 1

WS 11/12
Blatt 11
(13. Januar 2012)

Hausaufgaben

Aufgabe 1. Berechnen Sie die folgenden bestimmten (und zum Teil uneigentlichen) Integrale

$$a)\int_1^{64} \frac{\sqrt{t}-\sqrt[3]{t}}{\sqrt[3]{t}-1} \qquad c)\int_2^{\infty} \frac{dt}{t^4-1}$$

$$b)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\cosh t}.$$

Aufgabe 2. Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz

$$a)\int_{\frac{1}{\pi}}^{\infty} \sin\frac{1}{t}dt, \qquad b)\int_0^{\infty} \sin t^2 dt.$$

Aufgabe 3. Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale.

$$a)\int \frac{1}{t^3+1}dt \qquad b)\int t^3 \arctan t dt$$

Hinweis: Zeigen Sie $\frac{1}{t^3+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+t} - \frac{t-2}{t^2-t+1}\right)$.

Aufgabe 4. Taylorreihe
Sei die Funktion $f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}},$$

und sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ihre Taylorreihe mit dem Ursprung als Entwicklungspunkt.

(a) Wie lauten die Koeffizienten a_n für $n \geq 1$?

(b) Wie gross ist der Konvergenzradius der Taylorreihe?

(c) Wie lauten die Koeffizienten b_n der Taylorreihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ von $f'(x)$ im gleichen Entwicklungspunkt?

Aufgabe 5. Bestimmen Sie die Taylorreihe $T_0 f$ mit Mittelpunkt Null für die Funktion $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definiert durch:

$$f(x) := \int_0^x \frac{dt}{\sqrt[3]{1+t^2}}.$$

Für welche x konvergiert $T_0 f$.

Aufgabe 6. Es sei $f : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ eine nicht-negative, monoton abnehmende Funktion, sodass das uneigentliche Inegral

$$\int_0^\infty f(t)dt$$

existiert. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Schlüsse:

a) Es gibt eine Konstante $C \geq 0$ so, dass die Abschätzung $f(t) \leq \frac{C}{t}$ für alle $t > 0$ gilt.

b) Das uneigentliche Inetgral $\int_0^\infty [f(t)]^2 dt$ existiert.

c) Aussage b) gilt auch, wenn man in der Voraussetzung $[0, \infty)$ durch $(0, \infty)$ ersetzt.