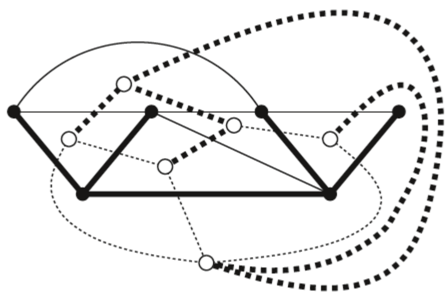
Drei Anwendungen der Eulerschen Polyederformel

Proseminar: Beweise aus dem Buch, Yushan Liu, 17. Januar 2015

Eulersche Polyederformel:

Für jeden zusammenhängenden ebenen Graphen G mit n Knoten, e Kanten und f Gebieten gilt: $n - e + f = 2$.

Beweis:
Seien T ein Spannbaum für G und $e_T \subseteq E$ die Kanten von T. Wir konstruieren einen Dualgraphen G^*, indem wir in jedes Gebiet einen neuen Knoten legen und alle benachbarten Knoten durch jede gemeinsame Randkante verbinden. Nun seien $e_{T^*} \subseteq E$ die entsprechenden Kanten zu $E \setminus e_T$, d.h. die Kanten von T und T^* schneiden sich nicht. T^* verbindet alle Gebiete, da T kreisfrei ist. Somit ist auch T^* kreisfrei und ein Spannbaum für G^*.



Für jeden Baum gilt: $n = e + 1$. Daraus folgt $n = e_T + 1$ und $f = e_{T^*} + 1$. Zusammen ergibt dies: $n + f = (e_T + 1) + (e_{T^*} + 1) = e + 2$, was die Behauptung ist. □

Sei n_i die Anzahl der Knoten mit Grad i in G. Dann gelten:
$n = n_1 + n_2 + n_3 + \ldots$ und $2e = n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \ldots$. Der Durchschnittsgrad $\bar{d}$ ist gleich $\frac{2e}{n}$.
Sei f_k die Anzahl der Gebiete, die durch k Kanten begrenzt werden. Dann gelten:
$f = f_3 + f_4 + f_5 + \ldots$ und $2e = 3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + \ldots$. Durchschnittlich wird jedes Gebiet von $\bar{f} = \frac{2e}{f}$ Kanten begrenzt.

Proposition:

Sei G ein einfacher, ebener Graph mit $n > 2$ Knoten. Dann gilt:

a) G hat höchstens $3n - 6$ Kanten.

b) G hat einen Knoten von Grad höchstens 5.

c) Werden die Kanten von G zwei-gefärbt, dann gibt es einen Knoten mit höchstens zwei Farbwechseln, wenn man die Kanten um den Knoten herum im Kreis betrachtet.

Beweis: Sei G o.B.d.A. zusammenhängend.

a) Mit $f = f_3 + f_4 + f_5 + \ldots$ und $2e = 3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + \ldots$ gilt $2e - 3f \geq 0$, also auch $3e - 3f \geq e$. Damit gilt die folgende Ungleichungskette: $3n - 6 = 3(n-2) = 3(e-f) = 3e - 3f \geq e$, wobei die Eulersche Polyederformel benutzt wurde.

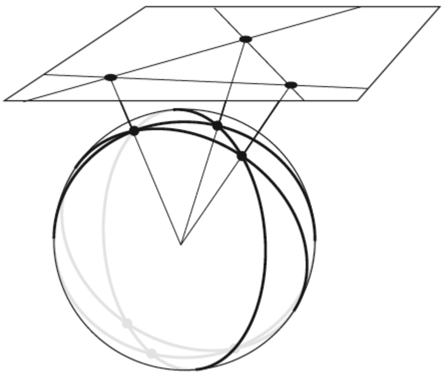
b) Es gilt: $\bar{d} = \frac{2e}{n} \leq \frac{6n-12}{n} < \frac{6n}{n} = 6$. Also muss es einen Knoten von Grad höchstens 5 geben.

c) Sei c die Anzahl der Farbwechsel in G. Angenommen, die Aussage wäre falsch.
Da es immer nur eine gerade Anzahl an Farbwechsel geben kann, gäbe es mindestens $4n$ Farbwechsel. Ein Gebiet mit $2k$ oder $2k+1$ Kanten hat höchstens 2k solcher Farbwechsel.
Es folgt: $4n \leq c \leq 2f_3 + 4f_4 + 4f_5 + 6f_6 + 6f_7 + 8f_8 + \cdots \leq 2f_3 + 4f_4 + 6f_5 + 8f_6 + \ldots$
$= 2(3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + \ldots) - 4(f_3 + f_4 + f_5 + \ldots) = 4e - 4f$.
Also $e \geq n + f$, was im Widerspruch zur Eulerschen Polyederformel steht. □

1. Der Sylvester-Gallai-Satz

Seien $n \geq 3$ Punkte in der Ebene gegeben, die nicht alle auf einer Geraden liegen. Dann gibt es eine Gerade, die genau zwei der Punkte enthält.

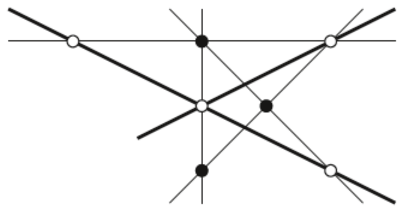
Beweis:
Bettet man die Ebene $\mathbb{R}^2$ in den Raum $\mathbb{R}^3$ bzw. in die Einheitssphäre ein, dann entspricht jeder Punkt im $\mathbb{R}^2$ einem Paar von gegenüberliegenden Punkten auf der Einheitssphäre und jede Gerade entspricht einem Großkreis.



Somit ist der Sylvester-Gallai-Satz äquivalent zu:
Seien $n \geq 3$ Paare von einander gegenüberliegenden Punkten auf der Einheitskugel gegeben, die nicht alle auf einem Großkreis liegen. Dann gibt es immer einen Großkreis, der genau zwei der Punktpaare enthält.
Durch Dualisieren, wobei man die Punkte $\pm v \in S^2$ durch die orthogonalen Kreise $C_v := \{x \in S^2 : \langle x, v\rangle = 0\}$ und die Geraden durch Schnittpunkte ersetzt, erhält man den folgenden Satz:
Seien $n \geq 3$ Großkreise auf S^2 gegeben, die nicht alle durch einen Punkt gehen. Dann gibt es immer einen Punkt, der auf genau zwei Großkreisen liegt.
Die Anordnung der Großkreise entspricht einem ebenen Graphen auf S^2, wobei die Schnittpunkte die Knoten, und die Abschnitte zwischen den Schnittpunkten die Kanten darstellen. Jeder Knotengrad ist gerade und mindestens 4. Mit *b*) aus der Proposition folgt, dass es einen Schnittpunkt auf zwei Großkreisen gibt, also eine Gerade existiert, die genau zwei der Punkte enthält. □

2. Einfarbige Graphen

Seien endlich viele schwarze und weiße Punkte in der Ebene gegeben, die nicht alle auf einer Geraden liegen. Dann gibt es immer eine einfarbige Gerade.



Beweis:
Wir übertragen dieses Problem erneut durch Dualisieren auf die Einheitssphäre, sodass Folgendes zu zeigen ist:
Für jede endliche Menge von schwarzen und weißen Großkreisen, die nicht alle durch einen Punkt gehen, gibt es einen Schnittpunkt, der entweder nur auf weißen oder nur auf schwarzen Großkreisen liegt.
Falls ein weißer und ein schwarzer Großkreis sich schneiden, gibt es in diesem Schnittpunkt vier Farbwechsel. Mit c) aus der Proposition gibt es einen Knoten mit höchstens zwei Farbwechseln, in diesem Fall also mit gar keinen Farbwechseln. Dieser Knoten ist der gesuchte Schnittpunkt. □

3. Satz von Pick

Die Fläche eines Polygons $Q \subseteq \mathbb{R}^2$ mit ganzzahligen Knoten ist durch $A(Q) = n_{in} + \frac{1}{2}n_{rd} - 1$ gegeben. Dabei bezeichnen n_{in} die inneren Punkte und n_{rd} die Randpunkte.

Ein konvexes Polygon $P \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt *elementar*, wenn seine Knoten ganzzahlige Koordinaten besitzen und es keine weiteren ganzzahligen Punkte enthält.
Im Beweis werden wir folgendes Lemma benutzen:

Lemma:
Jedes elementare Dreieck $\Delta = conv\{p_0, p_1, p_2\} \subseteq \mathbb{R}^2$ hat die Fläche $A(\Delta) = \frac{1}{2}$.

Beweis vom Satz von Pick:
Jedes wie im Satz beschriebene Polygon besitzt eine Triangulierung, die alle inneren Punkte und alle Randpunkte benutzt. Die Triangulierung kann man als ebenen Graphen auffassen, sodass es ein unbegrentes Gebiet und $(f-1)$ elementare Dreiecke gibt, für die laut Lemma gilt: $A(\Delta) = \frac{1}{2}$.
Die Fläche des Polygons ist also durch $A(Q) = \frac{1}{2}(f-1)$ gegeben.
Ein Dreieck hat drei Seiten, wobei eine äußere Kante (e_{rd}) ein Dreieck begrenzt und eine innere Kante (e_{in}) zwei Dreiecke begrenzt. Daraus ergibt sich:
$2e_{in} + e_{rd} = 3(f-1) \Leftrightarrow f = 2(e-f) - e_{rd} + 3$.
Mit der Eulerschen Polyederformel und der Tatsache, dass ein Polygon gleich viele Randkanten wie Randknoten besitzt, folgt:
$f = 2(n-2) - n_{rd} + 3 = 2n_{in} + n_{rd} - 1$.
Daraus lässt sich nun die Fläche des Polygons berechnen:
$A(Q) = \frac{1}{2}(f-1) = n_{in} + \frac{1}{2}n_{rd} - 1$. □