Erreichbarkeit der Kapazität für diskrete gedächtnislose Kanäle

Sebastian Scharl

18. Juni 2015

Definition (Gemeinsame typische Sequenzen)
Die Vereinigung $A_\epsilon^{(n)}$ von gemeinsamen typischen Sequenzen $\{(x^n, y^n)\}$ ausgehend von der Verteilung $p(x, y)$ ist die Vereinigung von n-Sequenzen mit empirischen Entropien die ϵ-nah an den wahren Entropien liegen:
$A_\epsilon^{(n)} = \{(x^n, y^n) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$:

$$\mid -\tfrac{1}{n} \log p(x^n) - H(X) \mid < \epsilon$$

$$\mid -\tfrac{1}{n} \log p(y^n) - H(Y) \mid < \epsilon$$

$$\mid -\tfrac{1}{n} \log p(x^n, y^n) - H(X, Y) \mid < \epsilon\}$$

mit

$$p(x^n, y^n) = \textstyle\prod_{i=1}^n p(x_i, y_i)$$

Theorem (Asymptotische Äquipartition Eigenschaft(AEP))
Seien (X^n, Y^n) Sequenzen der Länge n die unabhängig und identisch verteilt sind mit $p(x^n, y^n) = \prod_{i=1}^n p(x_i, y_i)$ Dann:

1. $\Pr\left((X^n, Y^n) \in A_\epsilon^{(n)}\right) \to 1$ wenn $n \to \infty$

2. $\mid A_\epsilon^{(n)} \mid \leq 2^{n(H(X,Y)+\epsilon)}$

3. Wenn $(\tilde{X}^n, \tilde{Y}^n) \sim p(x^n)p(y^n)$[zum Bespiel wenn $\tilde{X}^n$ und $\tilde{Y}^n$ undabhängig sind und die gleichen Randverteilungen wie $p(x^n, y^n)$ besitzen] dann,

$$\Pr\left((\tilde{X}^n, \tilde{Y}^n) \in A_\epsilon^{(n)}\right) \leq 2^{-n(I(X;Y)-3\epsilon)}$$

und für große n,

$$\Pr\left((\tilde{X}^n, \tilde{Y}^n) \in A_\epsilon^{(n)}\right) \geq (1-\epsilon)2^{-n(I(X;Y)+3\epsilon)}$$

Theorem (Kanalkodierungstheorem)
Für einen diskreten gedächtnislosen Kanal sind alle Raten unterhalb der Kapazität erreichbar. Beziehungsweise: für alle Raten $R < C$ existiert eine Sequenz von $(2^{nR}, n)$ Codes mit maximaler Fehlerwahrscheinlichkeit $\lambda^{(n)} \to 0$. Umgekehrt, muss für jede Sequenz von $(2^{nR}, n)$ Codes mit $\lambda^{(n)} \to 0$, $R \leq C$ gelten.

Literatur
Thomas M. Cover and Joy A. Thomas, Elements of Information Theory,Wiley-Interscience; 2. edition (2006)
Michael Wolf, Information Theory, lecture notes WS 2012/13 TUM